

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кравець В.Г, Білецький В.С., Смирнов В.О., Сергєєв П.В.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Геоінженерія»
спеціальності 184 «Гірництво»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент Бойко В.В., д-р техн. наук, проф.,
 Інститут гідромеханіки НАНУ

Відповідальний Фролов О.О., д-р техн. наук, доц.,
редактор КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 18.06.2020 р.)
за поданням Вченої ради Інституту енергозбереження та енергоменеджменту
(протокол № 12 від 28.04.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Кравець Віктор Георгійович, д-р техн. наук, проф.
Білецький Володимир Стефанович, д-р техн. наук, проф.
Смирнов Валерій Олександрович, канд. техн. наук, доц.
Сергєєв Павло Всеволодович, д-р техн. наук, проф.*

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

Моделювання процесів збагачення корисних копалин. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 184 «Гірництво» / В. Г. Кравець, В. С. Білецький, В. О. Смирнов, П. В. Сергєєв ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл : 18,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 437с.

Викладені основи моделювання процесів збагачення корисних копалин. Зокрема описані методи фізичного і математичного моделювання процесів. Наведено математичні описи гранулометричного і фракційного складу, технологічних операцій – дезінтеграції, сепарації, зневоднення та ін., а також методи переходу від лабораторних показників до промислових. З використанням праць провідних вітчизняних і зарубіжних науковців наведені приклади моделювання підготовчих, основних та заключних процесів збагачення корисних копалин.

Навчальний посібник відповідає програмі навчальної дисципліни "Техніка і технологія переробки гірських порід", призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 184 "Гірництво" та буде корисним фахівцям з гірничо-видобувних підприємств, дослідних лабораторій збагачувальних фабрик, науково-дослідних і проектних інститутів і геологічних організацій.

© В. Г. Кравець, В. С. Білецький, В. О. Смирнов, П. В. Сергєєв, 2020
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
РОЗДІЛ 1 ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ	9
1.1 Основні поняття	9
1.2 Основна мета, принципи та етапи моделювання технологічних процесів	19
1.3 Особливості моделювання процесів збагачення корисних копалин ..	21
РОЗДІЛ 2 ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ	25
2.1 Теорія подібності.....	25
2.1.1 Рух в'язкої рідини	25
2.1.2 Умови застосування теорії подібності.....	35
2.1.3 Диференціальні рівняння теплообміну для моделі	40
2.1.4 Гідродинамічна подібність	42
2.1.5 Теплова подібність.....	45
2.1.6 Дифузійна подібність	48
2.1.7 Подібність деяких часткових випадків переносу	51
2.1.8 Узагальнення	53
2.2 Метод аналізу розмірностей	58
2.3 Моделювання на основі методу аналогій.....	65
2.3.1 Методи аналогій.....	65
2.3.2. Моделювання плоских потоків на основі електрогідродинамічної аналогії (ЕГДА)	70
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ	76
3.1 Статистичні методи оцінки експериментальних даних	76
3.1.1 Постановка задачі	76
3.1.2 Статистична оцінка результатів досліджень.....	78
3.2 Моделювання із застосуванням «активних» і «пасивних» методів експерименту	93
3.2.1 «Пасивні» методи моделювання із застосуванням дисперсійного, регресійного і кореляційного аналізів	97
3.2.2 «Активний» метод оптимального планування експериментів....	118
РОЗДІЛ 4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. АНАЛІТИЧНІ, КОМБІНОВАНІ І СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН	159
4.1 Аналітичні і комбіновані методи моделювання	159
4.2 Графічні методи моделювання	160
4.2.1 Факторні моделі	160
4.2.2 Феноменологічні моделі.....	161
4.2.3 Моделі-графи.....	162

4.3 Спеціальні методи моделювання.....	164
4.3.1 Моделювання на основі елементів прогнозування	164
4.3.2 Евристичне моделювання	168
4.3.3 Адаптаційне моделювання.....	172
4.4 Сепараційні характеристики збагачувальних процесів як математичні моделі	176
РОЗДІЛ 5 ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН	183
5.1 Опис вихідної мінеральної сировини.....	183
5.1.1 Математичний опис гранулометричного складу сипкої мінеральної сировини	184
5.1.2 Математичний опис фракційного складу сипкої мінеральної сировини.....	191
5.2. Моделювання підготовчих процесів збагачення корисних копалин	208
5.2.1. Моделювання процесів дезінтеграції (дроблення і подрібнення)	208
5.2.2 Моделювання процесу грохочення	221
5.2.3 Моделювання процесів гідравлічної класифікації	229
5.3 Моделювання основних процесів збагачення корисних копалин	241
5.3.1 Моделювання гравітаційних процесів.....	241
5.3.2 Моделювання процесу флотації	264
5.3.3 Моделювання процесу магнітної сепарації.....	269
5.4 Моделювання заключних процесів збагачення корисних копалин..	276
5.4.1 Моделювання процесу згущення у радіальному згущувачі.....	276
5.4.2 Моделювання процесу зневоднення фільтруванням	282
5.5 Моделювання технологічних схем збагачення корисних копалин ..	288
5.5.1 Постановка проблеми і загальні рішення.....	288
5.5.2 Аналіз сепараційних характеристик схем збагачення	292
5.5.3 Аналіз циркулюючих навантажень	297
5.6 Моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням комп'ютерних технологій	299
5.7 Практика чисельного (комп'ютерного) моделювання	301
5.7.1 Степеневі і показникові функції.....	302
5.7.2 Вибір емпіричної формули. Метод вирівнювання	304
5.7.3 Визначення коефіцієнтів емпіричної формули. Спосіб середніх.....	305
РОЗДІЛ 6	315
6.1 Методика розробки і аналізу регресійних моделей технологічних процесів переробки корисних копалин з використанням сучасних комп'ютерних програм.....	315
6.1.1 Повне факторне планування технологічних процесів на основі центрально-композиційних ротатбельних планів другого порядку ..	317

6.1.2 Планування експерименту при математичному описі діаграм «склад-властивість»	336
6.2 Приклади моделювання технологічних процесів переробки корисних копалин.....	346
6.2.1 Процес адгезійного контакту «вуглемасляна речовина – золото»	346
6.2.2 Процес зневоднення вугільних шламів фільтруванням за допомогою латексних флокулянтів.....	350
6.2.3 Процес зневоднення вуглемасляного агломерату центрифугуванням	356
6.2.4 Процес зневоднення дрібнодисперсних матеріалів методом зриву водної плівки	359
6.2.5 Процес знесолення вугілля	364
6.2.6 Процес селективного подрібнення руд.....	369
6.2.7 Визначення раціонального складу композиційних реагентів-нафтопродуктів для інтенсивного зневоднення вугілля фільтруванням	374
6.2.8 Процес масляної грануляції бурого вугілля.....	379
6.2.9 Визначення оптимального складу флокулянта на основі масляних реагентів.....	383
6.2.10 Процес селективної флокуляції вугілля маслами.....	394
6.2.11 Процес селективної флокуляції вугілля латексами.....	403
6.2.12 Флокуляційно-флотаційний процес збагачення вугілля	407
6.2.13 Суміщений процес «селективна масляна агрегація – гідротранспорт вугілля»	411
6.2.14 Процес осадження твердої фази хвостів флотації рідкіснометалічних руд	414
ДОДАТОК А Густина і твердість мінералів розділюваних.....	422
гравітаційними процесами	422
ДОДАТОК Б Питома магнітна сприйнятливність деяких мінералів.....	425
ДОДАТОК В Електричні властивості деяких мінералів	426
ДОДАТОК Г Критерій Ст'юдента t	428
ДОДАТОК Д Критерій Фішера F	429
ДОДАТОК Е Критерій Кохрена G	430
ДОДАТОК Ж Критерій Пірсона χ^2	431
Список літератури	432

ПЕРЕДМОВА

При вивченні явищ, що відбуваються в природі, техніці і суспільстві наука широко використовує метод моделювання цих явищ.

Моделювання – це метод дослідження явищ і процесів, що ґрунтується на заміні конкретного об'єкта досліджень (оригіналу) іншим, подібним до нього (моделлю).

Моделювання в широкому сенсі — це особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об'єкта пізнання вибирає чи створює схожий із ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення.

При цьому вивчення явищ на моделі можна здійснити значно простіше і повніше, ніж в натурі.

Однак результати експериментів на моделі можуть бути використані для рішення задач практики тільки у випадку, якщо при проведенні експериментів додержуються визначених законів моделювання.

Моделювання – складна, трудомістка і відповідальна наукова задача. Іноді дослідження за допомогою моделей є єдино можливим способом експериментального вивчення технологічних процесів. Так, процеси, які тривають багато років, можна вивчати на моделях протягом короткого проміжку часу. І навпаки, швидкоплинні процеси вивчаються на моделях протягом більш довгого часу.

Моделювання – це метод, а модель – форма, засіб наукового пізнання. До моделювання звертаються тоді, коли досліджувати реальний об'єкт з усією сукупністю його властивостей недоцільно, незручно або неможливо.

Моделювання у галузі збагачення корисних копалин має на меті, *по-перше*, створення спрощених, але адекватних відображень-моделей технологічних процесів, *по-друге*, вивчення технологічних процесів збагачення за допомогою одержаних моделей і, *по-третьє*, прогнозування їх результатів за різних умов, зміні характеристик перероблюваної сировини, що використовується як у практиці збагачення, так і при проектуванні збагачувальних фабрик, розробці раціональних та оптимальних технологічних режимів, автоматичному керуванні процесами тощо.

Об'єктами моделювання у галузі збагачення корисних копалин можуть бути збагачувальні машини і апарати, транспортні системи, технологічні операції і схеми, відділення, цехи і збагачувальна фабрика у цілому.

Моделювання різних фізичних процесів виходить з подібності явищ, що розглядаються. Два явища називаються подібними, якщо за характеристиками одного можна одержати характеристики іншого шляхом простого перерахунку. Умовами або критеріями подібності двох явищ є рівності деяких безрозмірних параметрів, які називаються числами або критеріями подібності. Визначення критеріїв подібності при моделюванні процесів, що вивчаються, потребує глибокого знання механізму цих процесів і є досить важкою задачею. При рішенні цієї задачі усі досліджувані процеси слід розділяти на дві суттєво різні групи. До першої групи потрібно віднести процеси і явища, які можна описати рівняннями, до другої, яка становить найбільший інтерес, – процеси і явища, які ще не мають математичного опису. У випадках, коли рівняння досліджуваних процесів невідомі, числа подібності можна знайти за теорією розмірностей. При наявності диференціальних рівнянь досліджуваних процесів числа подібності легко визначаються, як коефіцієнти рівнянь, які представлені в безрозмірному вигляді. Природно, що одержання критеріїв подібності при наявності рівнянь значно простіше, ніж при їх відсутності. Тому теорію розмірностей слід застосовувати для отримання критеріїв подібності тільки при дослідженні процесів, які не мають математичного опису.

Ефективність процесів збагачення корисних копалин в багатьох випадках визначається ефективністю експериментальних робіт як у лабораторних, так і у промислових умовах.

Експеримент у збагаченні дотепер є практично єдиним джерелом нової інформації, а уся робота технолога тією чи іншою мірою пов'язана з експериментом. Рациональне планування експерименту полягає у такій тактиці виконання робіт, яка давала б максимальну інформацію при обмеженому числі дослідів або дозволяла б виконати мінімальне число дослідів для рішення поставлених задач. Оптимальність експерименту зводиться до використання спеціальних планів і стиску інформації – представленню її у вигляді моделей, під якими частіше за все розуміють деяку сукупність рівнянь, що описують процес. Отримання моделі дозволяє пояснити властивості процесу, а також забезпечити подальшу роботу, яка полягає у відшукуванні найкращого результату або режиму [2].

Вибір оптимальної технологічної схеми підприємства є головною задачею, яка вирішується при проектуванні збагачувальної фабрики і визначає ефективність її подальшої експлуатації. Трудність правильного розрахунку і вибору схеми полягає у відсутності достатньої і достовірної інформації про технологічні властивості сировини і параметри апаратів, які працюють на даній сировині. Тому при проектуванні нової збагачувальної фабрики дослідження проводять у декілька етапів, при цьому основним методом досліджень є метод фізичного моделювання [4].

Попередні дослідження вибраних схем виконують в лабораторних умовах і на лабораторному обладнанні. В лабораторних умовах використовують повний і дробовий факторні експерименти, реалізують дисперсійні плани, які дозволять значно скоротити обсяг досліджень і отримати статистичну модель у вигляді полінома.

Наступним етапом є напівпромислові дослідження оптимального варіанта схеми, після чого результати досліджень перевіряють на діючій збагачувальній фабриці.

В промислових умовах застосовуються еволюційне планування, адаптаційні і евристичні методи одержання моделей, регресійний і кореляційний способи обробки.

В узагальнюючих роботах використовують аналітично побудовані моделі.

Дослідження тільки на основі фізичної моделі – процес трудомісткий, дорогий і тривалий.

Математичне моделювання у порівнянні з фізичним вносить гнучкість, достовірність і швидкість. Воно дозволяє без суттєвих витрат імітувати на ЕОМ різноманітні варіанти технологічних схем збагачення, шихтовок корисної копалини, навантажень на апарати, їхні типорозміри і т.п. При цьому математичне моделювання передбачає попередні експериментальні дослідження, органічно пов'язане з ними, так як без експериментальних даних, які дають інформацію про корисну копалину, апарат, умови процесу, моделювати схему неможливо. Основна вимога до математичної моделі – можливість технологічного розрахунку досліджуваних операцій і схем.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Основні поняття

Модель – дуже широке і ємне поняття, яке застосовується у різних аспектах. В широкому розумінні модель – речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи(та) характеристики об'єкта дослідження (оригіналу). В технічних задачах під моделлю розуміють математичний і логічний зв'язок між факторами і показниками процесу.

Модель – це об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу.

Аналіз досвіду використання моделей у природничих і технічних науках дозволяє зробити висновок, що модель – це наше уявлення про досліджуваний об'єкт, своєрідна форма кодування інформації про об'єкт.

За формальною класифікацією, яка часто будується за принципом дихотомії, розрізняють такі моделі: лінійні й нелінійні, зосереджені та розподілені системи, детерміновані (аналітичні) та стохастичні, статичні та динамічні, дискретні та безперервні. Можливі й змішані типи, наприклад, в одному відношенні зосереджені (по частині параметрів), в іншому – розподілені моделі, аналітично-статистичні і т.д.

Розрізняють такі основні різновиди моделей, які використовуються у нафтогазовій інженерії:

- *описова модель* полягає в будь-якому техніко-технологічному опису об'єкта моделювання;

Приклад – опис *факторної моделі* технологічного процесу – схеми («чорного ящика»), яка показує всі фактори (чинники), що впливають на процес, вихідні параметри та зв'язок між вхідними та вихідними характеристиками потоків речовини та енергії.

Інший приклад – опис *феноменологічної моделі* – схеми, яка відображає послідовність та взаємозв'язок всіх елементарних фізичних та хімічних процесів (субпроцесів), які мають місце при проведенні технологічного процесу (наприклад, феноменологічна модель процесу регенерації бурового розчину тощо). Вихідні величини кожного

попереднього субпроцесу є вхідними для наступного. Вихідні величини останнього субпроцесу є вихідними величинами технологічного процесу в цілому.

- *евристична модель* полягає у формалізації моделей процесів, що сформувалися у людини, яка веде технологічний процес, в результаті численних особистих проб і спостережень;

- *графічна модель* представляє об'єкт моделювання у вигляді рисунків, креслень, графів, схем; Наприклад, *феноменологічна модель*, *факторна модель*, *граф* тощо;

- *фізична модель* являє собою змінений у визначеному масштабі (зменшення або збільшення) об'єкт моделювання;

- *математична модель* – опис об'єкта моделювання однією (*одноструктурна модель*) або декількома (*складноструктурна модель*) математичною залежністю; розрізняють *аналітичні*, *емпіричні* та змішані математичні моделі;

- *аналогова модель* використовує заміну об'єкта моделювання іншим, який відрізняється за своєю фізичною природою, але вони можуть бути описані одним й тим же диференціальним рівнянням;

- *імітаційна модель* – представлення об'єкта моделювання у вигляді рекурентних співвідношень і наступна імітація роботи об'єкта на ЕОМ.

Математична модель – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

У нафтогазовій інженерії найчастіше застосовуються два способи математичного моделювання:

аналітичний, що передбачає можливість точного математичного опису строго детермінованих систем,

ймовірнісний, що дозволяє отримати не однозначне рішення, а його імовірнісну характеристику.

Для створення математичних моделей використовують різні математичні засоби — мову диференціальних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей, графи та інші.

Для будь якого об'єкта можна скласти велику кількість моделей, які будуть відрізнятися одна від іншої перш за все остаточною погрешністю (остаточною дисперсією), тобто будуть відтворювати реальний об'єкт з певною точністю.

Моделі бувають статичні $y = f(x)$ і динамічні $y = f(x, t)$, де y – будь який вихідний показник процесу; x – фактор, що діє на вході процесу; t – поточний час.

Статичні моделі бувають:

– лінійні :

$$y = a_0 + a_1x; \quad y = a_1\Delta x, \quad (1.1)$$

– нелінійні за фактором x :

$$y = a_0 + a_1x + a_{11}x^2, \quad (1.2)$$

– нелінійні за параметром, напр., b :

$$y = ae^{-bx}. \quad (1.3)$$

Частіше за все отримують багатомірні моделі, тобто y є функцією декількох факторів:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.4)$$

Моделювання – заміщення одного об'єкта іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою об'єкта-моделі. Моделювання – метод пізнання навколишнього світу, який можливо віднести до загальнонаукових методів, застосовуваним як на емпіричному, так і на теоретичному рівні пізнання.

Таким чином, базовим визначенням можна вважати таке: моделювання – це побудова (або вибір з вже існуючих) моделі, її вивчення і використання з метою отримання нових знань про досліджуваний об'єкт.

Алгоритм моделювання включає спочатку побудову особливої ідеальної конструкції, *змістовної моделі* (інші автори називають цей ідеальний об'єкт *концептуальна модель*, *умоглядна модель* або *передмодель*). При цьому фінальна математична конструкція називається *формальною моделлю* або просто математичною моделлю, отриманою в результаті формалізації даної змістовної моделі (передмоделі). Побудова змістовної моделі може проводитися за допомогою набору готових ідеалізацій, як у механіці, де ідеальні пружини, тверді тіла, ідеальні маятники, пружні середовища і т.п. дають готові структурні елементи для змістовного моделювання. У нафтогазовій інженерії змістовною передмоделлю може виступати згадана вище факторна і (або) феноменологічна модель технологічного процесу. Для пристроїв і деталей

– 3D-модель, тобто тривимірний опис об'єкта — представлення об'єкта в трьох просторових вимірах – координатах X, Y, та Z.

Теорія і практика моделювання оперує рядом понять: *об'єкт, процес, система, апіорна інформація, дослід, експеримент, фактор, область експериментування, цільова функція, похибка дослідів, обмеження та ін.*

Об'єкт (від лат. *objectum* – предмет) – все, на що спрямована діяльність людини. Будь-який об'єкт дослідження є нескінченно складним і характеризується нескінченним числом станів і параметрів.

Процес – послідовна зміна станів об'єкту в часі, а також певна сукупність ряду послідовних дій, спрямованих на досягнення певного результату.

Система – множина взаємопов'язаних елементів, відокремлена від середовища і яка взаємодіє з ним, як ціле. Система має конкретну структуру і цілком конкретне цільове призначення. Підсистемою називають складову частину системи, у якій можна виокремити інші складові.

Елементом системи називають найпростішу складову частину системи, яку умовно розглядають як неподільну.

Зв'язком називають співвідношення між компонентами системи, оснований на взаємозалежності і взаємообумовленості.

Зовнішнє середовище – множина існуючих поза системою (об'єктом) елементів будь-якої природи, що впливають на систему (об'єкт) або знаходяться під її (його) впливом.

Гіпотеза – наукове припущення, що висувається для пояснення будь-якого явища і потребує перевірки на досліді та теоретичного обґрунтування, для того щоб стати достовірною науковою теорією.

Аналогія – подібність, схожість у цілому відмінних предметів, явищ за певними властивостями, ознаками або відношеннями.

Адекватність моделі – збіг властивостей (функцій / параметрів / характеристик і т. п) моделі і відповідних властивостей модельованого об'єкта.

Дослідом називають однократне виконання усіх необхідних операцій для отримання одного експериментального результату. В результаті дослідів отримують одне число або сукупність чисел, які характеризують декілька різнорідних даних. Дослід по суті – здійснення визначеного діяння на об'єкт і реєстрування одержаного результату. Дослід – це

відтворення якого-небудь явища або спостереження за новим явищем у певних умовах з метою вивчення, дослідження.

Експериментом називають сукупність дослідів, об'єднаних однією системою їх постановки, взаємозв'язком результатів і способом їх обробки. В результаті експерименту отримують сукупність результатів, які допускають їхню сумісну обробку і зіставлення.

Фактором (чинником) називають умови, рушійну силу будь-якого процесу, явища. У нашому випадку фактор – незалежна змінна, яка може приймати в деякому інтервалі часу визначені значення. Фактор повинний задовольняти визначеним вимогам:

- *первинність*, тобто як фактор доцільніше приймати таку величину, яка не є функцією декількох, у тому числі невідомих, величин. Вторинні фактори звичайно із достовірністю можна встановити на початку досліду, що й слід враховувати при інтерпретації результатів;

- *можливість управління* пов'язана з первинністю і полягає у тому, що фактор повинен встановлюватись на необхідному рівні, інакше план експерименту не буде реалізований у деякому досліді, в результаті чого робота не буде виконана або потребуватиме серйозного коректування;

- *операційність і вимірність* – це вимоги до однозначності (однотиповості) встановлення одного й того ж фактора на одному і тому ж рівні, а також до вказівок щодо послідовності операцій по максимально точному встановленню і контролю значення фактора.

- *незалежність* факторів один від одного;

- *безпека експерименту* вимагає передбачити і виключити до початку дослідів такі комбінації факторів, які можуть привести до вибуху, виділення токсичних компонентів, аварії на експериментальному пристрої.

Область експериментування – це сукупність запланованих значень факторів, яка охоплює деяку область гіперпростору. Усі результати і висновки на їх основі з відомою точністю належать саме до цієї області гіперпростору факторів. Інтерполяція значень і висновків усередині області експериментування є допустимою. Екстраполяція результатів і висновків за межами області експериментування можлива, але гарантувати визначену точність при цьому не можна.

Цільова функція – функція, що зв'язує мету (змінну y , що оптимізується) з керованими змінними. Цільова функція може містити:

- безпосередньо виміряні величини, напр., вихід γ продукту і вміст β цінного компоненту в ньому, у вигляді:

$$\gamma \rightarrow \gamma_{\max}; \beta = \beta_{\text{зад}}; \quad (1.5)$$

– деякий обчислювальний показник, який об'єднує декілька вихідних, безпосередньо вимірюваних показників досліду, напр., ефективність розділення E , що об'єднує вміст цінного компонента в концентраті β і у відходах ϑ ;

– деякий обчислювальний показник, який об'єднує як безпосередньо вимірювані показники β і ϑ , так і фактори напр., вміст цінного компонента у вихідній (перероблюваній) руді α . Тоді для вилучення ε цільова функція набуває вигляду:

$$\begin{cases} = (\alpha - \vartheta)\beta / (\beta - \vartheta)\alpha \rightarrow \max \\ \beta = \beta_{\text{зад}} \end{cases} \quad (1.6)$$

Важливою особливістю цільової функції є неможливість забезпечення в рамках одного процесу, при одному і тому ж наборі факторів управління, максимального (мінімального) значення двох і більше показників.

Формулюючи оптимізуючий показник слід виділити і додати до нього усі необхідні обмеження і отримати тим самим доцільну цільову функцію.

Обмеження – це будь які умови, які накладаються на можливість зміни факторів, вихідних показників, вхідних збуджуючих впливів, ресурсів і часу. Обмеження бувають принципові (умови фізичного здійснення), технічні, екологічні, економічні та умови техніки безпеки.

Регресія – форма зв'язку між випадковими величинами. Закон зміни математичного очікування однієї випадкової величини залежно від значень іншої. Розрізняють прямолінійну, криволінійну, ортогональну, параболічну та ін. регресії, а також лінію і поверхню регресії.

Локальний екстремум – екстремум в деякому довільно малому околі (області) гіперпростору.

Глобальний екстремум – екстремум в усій розглядуваній області гіперпростору. Передбачається, що глобальний екстремум один, а локальних екстремумів може бути багато.

Апріорна інформація – це інформація, якою володіє дослідник до початку експерименту. Апріорна інформація дозволяє: сформулювати цільову функцію; вибрати номенклатуру факторів, центр експерименту

(номінальні або початкові значення факторів), інтервали варіювання; методично правильно виконати збір інформації.

Точкові оцінки – числа, які використовують для характеристики результатів дослідів. При цьому використовують не тільки безпосередньо виміряні дані, але й при необхідності деякі розраховують. Найважливіші з них:

– *середнє арифметичне*, або середнє, яке позначається рисою над літерою:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n, \quad (1.7)$$

де y_i – результат, отриманий в i -тому досліді; n – число дослідів; \bar{y} – середнє арифметичне результатів n дослідів;

– середнє квадратичне відхилення:

$$S_y = \sqrt{[\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2] / (n-1)}; \quad (1.8)$$

– дисперсія – квадрат середнього квадратичного відхилення:

$$S_y^2 = [\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2] / (n-1). \quad (1.9)$$

Похибка дослідів – це відхилення у результатах, які породжені усілякими відхиленнями умов дослідів від заданих.

Випадкова похибка – складова загальної похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином (як за знаком, так і за величиною) під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини. Випадкові похибки з'являються внаслідок невеликих, але численних відхилень при виконанні дослідів (їх причини – конструктивні та технологічні недосконалості вузлів та деталей приладів; випадкові коливання зовнішніх впливів — температури, вологості повітря, атмосферного тиску, напруженості зовнішніх електричних та магнітних полів тощо; нестабільність живлення електронних приладів; суб'єктивні помилки оператора; вібрації; теплові шуми в електронних приладах; просторова неоднорідність та часова нестабільність об'єкта вимірювання). Ці похибки обчислюють за формулою: $e = \Delta - M(\Delta)$, де Δ — похибка вимірювання, $M(\Delta)$ — математичне сподівання похибки.

Систематична похибка – складова загальної похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини. Причинами виникнення систематичних похибок є: відхилення параметрів реальних засобів вимірювань від розрахункових значень, передбачених схемою; неврахування деяких деталей засобів вимірювань відносно їх осі обертання; пружна деформація деталей засобів вимірювань, які мають малу жорсткість, що призводить до додаткових переміщень; похибки градування чи невеликий зсув шкали приладу; неточність мір фізичних величин; старіння матеріалів, із яких виготовлені засоби вимірювань; відхилення значень впливних величин (температури, вологості, напруженості зовнішніх електричних та магнітних полів тощо) від їх значень під час градування засобів вимірювання. Виявити наявність систематичної похибки можна тільки порівнянням результату дослідів з еталонним, тобто результатом, який не містить систематичної похибки. Більшість систематичних похибок може бути виявлена та оцінена шляхом теоретичного аналізу властивостей об'єкта, умов вимірювання, особливостей методу, характеристик застосовуваних засобів вимірювань тощо. Після встановлення наявності систематичної похибки визначають причину її виникнення і усувають цю причину. Якщо причину встановити або усунути не можна, вводять поправки, що враховують вплив цієї систематичної похибки, яку не можна усунути.

Число ступенів свободи f – кількість незалежних значень результатів дослідів, які використовуються для обчислення коефіцієнтів моделі, похибки відтворення, остаточної дисперсії і т.п. Чисельно f дорівнює різниці між кількістю даних, що є, і обчисленими за цими даними показниками.

Похибка відтворення – це випадкова похибка, яка звичайно обчислюється у вигляді середнього квадратичного відхилення від середнього паралельних дослідів:

$$S_{By} = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 \right] / (k - 1)}, \quad (1.10)$$

де k – число паралельних дослідів; \bar{y} – середнє значення результатів k паралельних дослідів (дослідів виконаних при одних і тих же значеннях

факторів); y_i – результат i -того дослід; S_{By_i} – похибка відтворення результатів будь якого окремого дослід.

Похибка відтворення S_{By} середнього значення результату k дослідів буде менше і визначається за формулою:

$$S_{By} = S_{By_i} / \sqrt{k}. \quad (1.11)$$

Ця властивість зниження похибки широко використовується для підвищення точності результатів експерименту.

Звичайно припускають, що похибка відтворення є результатом деякої неточності виконання усіх операцій дослід, у зв'язку з чим вона повинна бути розподілена за нормальним законом. Відповідно до нормального закону вважають, що в межах $\pm S_{By}$ міститься 68 % похибки усіх дослідів; в межах $\pm 2S_{By}$ – 95,5 % і в межах $\pm 3S_{By}$ – 99,7 % усіх похибок. При обмеженій кількості дослідів використовують розподіл Ст'юдента, що враховує можливі похибки у визначенні S_{By_i} при малому числі даних. Таким чином, якщо задана довірна імовірність p (%) і відоме число ступенів свободи обчисленої похибки відтворення (звичайно $f_B = k - 1$), можна знайти довірчі інтервали для похибки результатів.

Довірчі інтервали похибки результатів – це діапазон значень, в якому з прийнятою довірчою імовірністю може знаходитися конкретне значення похибки окремого дослід (або інших характеристик дослідів, напр., середніх результатів паралельних дослідів):

$$\pm \Delta y_i = \pm t S_{By_i}, \quad (1.12)$$

де $\pm \Delta y_i$ – граничні значення похибок (максимальні позитивні і негативні) або довірчий інтервал; t – критерій Ст'юдента.

Із збільшенням довірчої імовірності довірчий інтервал розширюється, тобто при більшій довірчій імовірності гарантувати появу дослідних результатів можна тільки в більш широкому діапазоні.

Промахи – це випадкові похибки, які перевищують довірчі інтервали. Промахи виникають внаслідок грубого порушення умов дослід або особливо несприятливими обставинами. Як правило, їх відкидають, а дослід, якщо це можливо повторюють.

Промахи можуть бути як у гірший, так і у кращий бік, тому при появі дуже доброго результату, який розглядається як промах, необхідно проаналізувати умови його появи. В такому випадку промах може дати цінну інформацію для покращення результатів роботи.

Для виключення промахів з великої вибірки можна користуватися правилом 2σ або 3σ . Для промаху x^* розраховується абсолютне значення різниці $|x^* - x'|$. При довірчій імовірності $P = 0,95$ x^* відкидається, якщо $|x^* - x'| > 2\sigma$, а при $P = 0,997$, якщо $|x^* - x'| > 3\sigma$.

Похибка зведеного показника виконується при необхідності визначення похибки відтворюваності будь якого обчисленого (зведеного) показника вигляду $z = f(y, x)$ з використанням формули:

$$S_{Bz}^2 = (\partial z / \partial y)_0^2 S_{By}^2 + (\partial z / \partial x)_0^2 S_{Bx}^2. \quad (1.13)$$

Вважають, що похибки S_{By}^2 і S_{Bx}^2 не залежать одна від одної. Нульові індекси при похідних означають, що конкретні чисельні значення похідних знаходяться при деяких номінальних значеннях x_0 і y_0 .

Для похибок відтворюваності, що спричиняються випадково, звичайно припускається, що коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Якщо необхідно розглянути відхилення показника z , які спричиняються відхиленнями його складових факторів x і y , то слід використовувати формулу:

$$S_z^2 = (\partial z / \partial y)_0^2 S_y^2 + (\partial z / \partial x)_0^2 S_x^2 + 2(\partial z / \partial y)_0 (\partial z / \partial x)_0 S_y S_x r_{x/y}, \quad (1.14)$$

де $r_{x/y}$ – коефіцієнт кореляції між x і y .

Встановлення різниці. В результаті обробки даних експерименту робляться висновки, які формально зводяться до відповіді на одне з трьох питань:

- чи значимо відрізняються два (або більше) результати?
- чи значимо відрізняються дві (або більше) похибки відтворюваності однорідних результатів?

– чи значимо відрізняються кількості спостережених величин?

Відповіді на ці питання отримують в результаті наступних дій:

- визначають розрахункове значення спеціального критерію K_p ;

- задаються довірчою імовірністю p висновку;
- знаходять у відповідних таблицях значення критерію K_T при заданій p і знайдених ступенях свободи f ;
- порівнюють K_p і K_T ;
- якщо $K_p > K_T$ стверджують, що існуюча різниця між результатами не випадкова, тобто значима.

Для підтвердження значимості різниці звичайно задаються високою довірчою імовірністю більше 90 % (звичайно $p = 95$ %). Якщо з прийнятою імовірністю p різниці не встановлено, стверджувати що її взагалі не існує не можна, тобто зворотний висновок невірний.

Якщо необхідно встановити ідентичність (відсутність різниці) показників, задаються довірчою імовірністю менше 10 % (звичайно $p = 5$ %).

1.2 Основна мета, принципи та етапи моделювання технологічних процесів

Створюючи модель об'єкта, дослідник пізнає об'єкт, тобто виокремлює його з навколишнього середовища і будує його формальний опис.

Моделювання виконують з метою:

- опису об'єкта;
- пояснення процесів, які відбуваються в об'єкті;
- прогнозування поведінки і властивостей об'єкта при різних зовнішніх впливах.

Модель об'єкта допомагає зрозуміти, як влаштований конкретний досліджуваний об'єкт, які його структура, внутрішні зв'язки, основні властивості, закони розвитку, саморозвитку і взаємодії з навколишнім середовищем. Ще одна мета – прогнозування поведінки і властивостей об'єкта – є частиною стратегічної мети – управляти об'єктом, визначаючи за моделлю оптимальні керуючі впливи при заданих цілях і критеріях. Модель потрібна і для того, щоб прогнозувати наслідки різних впливів на об'єкт.

В основі моделювання лежить *теорія подібності*, згідно з якою абсолютна подібність можлива лише при заміні об'єкта іншим точно таким же. Цю ідею добре висловили А. Розенблют і Н. Вінер, коли сказали, що «найкращою моделлю кота є інший кіт, а ще краще – той же самий кіт». При моделюванні абсолютна подібність ніколи не досягається. Будь-яка модель не тотожна об'єкту-оригіналу і не є повною, так як при її побудові

дослідник враховував тільки ті особливості об'єкта, які вважав найбільш важливими для вирішення конкретної задачі.

Реальна користь від моделювання може бути отримана при виконанні наступних умов:

- модель повинна бути адекватною оригіналу в тому сенсі, що повинна з достатньою точністю відображати основні характеристики оригіналу, які цікавлять дослідника;
- модель повинна усувати проблеми, пов'язані з фізичними вимірюваннями якихось сигналів або характеристик оригіналу.

Моделювання базується на таких основоположних принципах:

1. Принцип інформаційної достатності – при повній відсутності інформації про об'єкт побудова його моделі неможлива. Існує деякий рівень апіорної інформації про об'єкт, при досягненні якого може бути побудована адекватна модель. При наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу.

2. Принцип здійсненності – створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження з імовірністю, яка суттєво відрізняється від нуля.

3. Принцип множинності моделей – створювана модель повинна відображати в першу чергу ті властивості реального об'єкта (системи), які цікавлять дослідника. Для повного дослідження об'єкту необхідна досить велика кількість моделей, що відображають досліджуваний об'єкт з різних сторін і з різним ступенем його деталізації.

4. Принцип агрегування – у більшості досліджень систему доцільно представити як сукупність підсистем, для опису яких виявляються придатними стандартні схеми.

5. Принцип параметризації – модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

Моделювання технологічних процесів – поетапний і циклічний процес. Виділяють чотири основних етапи моделювання.

Перший етап побудови моделі припускає наявність деяких знань про об'єкт. Пізнавальні можливості моделі обумовлюються тим, що модель відображає (відтворює, імітує) які-небудь істотні риси об'єкта-оригіналу. Причому, вивчення одних сторін модельованого об'єкта здійснюється ціною відмови від дослідження інших сторін. Тому будь-яка модель заміщає оригінал лише в строго обмеженому сенсі. Для одного об'єкта

може бути побудовано декілька «спеціалізованих» моделей, які концентрують увагу на певних сторонах досліджуваного об'єкта або ж характеризують об'єкт з різним ступенем деталізації.

На другому етапі модель виступає як самостійний об'єкт дослідження. Однією з форм такого дослідження є проведення «модельних» експериментів, при яких свідомо змінюються умови функціонування моделі і систематизуються дані про її «поведінку». Кінцевим результатом цього етапу є сукупність знань про одержані різновиди моделі.

На третьому етапі здійснюється перенесення знань з моделі на оригінал – формування сукупності знань про об'єкт. Одночасно відбувається перехід з «мови» моделі на «мову» оригіналу. Процес перенесення знань проводиться за певними правилами. Знання про моделі повинні бути скориговані з урахуванням тих властивостей об'єкта-оригіналу, які не знайшли відображення або були змінені при побудові моделі.

Четвертий етап – практична перевірка отриманих за допомогою моделей знань та їх використання для побудови узагальнюючої теорії об'єкта, його перетворення або управління ним.

Циклічність процесу моделювання може проявлятися в тому, що за першим чотириетапним циклом може реалізовуватися другий, третій і т. д. При цьому знання про досліджуваний об'єкт розширюються і уточнюються, а вихідна модель поступово вдосконалюється. Недоліки, виявлені після першого циклу моделювання, зумовлені неповним знанням об'єкта або помилками в побудові моделі, можна виправити в наступних циклах.

1.3 Особливості моделювання процесів збагачення корисних копалин

Збагачення корисних копалин характеризується декількома особливостями, які суттєво впливають на моделювання технологічних процесів.

По-перше, вхідні параметри описують, як правило, сипкі багатокомпонентні продукти різної крупності. При цьому виникає специфічна задача визначення (оцінки) розкриття і відкриття корисної компоненти в процесі дроблення та подрібнення.

По-друге, опрацьовано різні методи визначення збагачуваності корисної копалини гравітаційними, флотаційними, магнітними тощо та комбінованими способами. Під *збагачуваністю* розуміють гранично можливу точність розділення корисної копалини на відповідні продукти, яка не залежить від ефективності роботи збагачувальної установки.

Збагачуваність є технологічною оцінкою можливого ступеня вилучення і концентрації мінеральних компонентів при збагаченні корисних копалин і залежить від їх мінерального складу, текстури і структури.

По-третє, для різних технологічних процесів збагачення визначають сепараційні характеристики операції або схеми – функції, що показують вилучення елементарних фракцій у концентрат в залежності від їх фізичних (хімічних) властивостей. Такі характеристики по суті вже є своєрідними моделями цих технологічних процесів, операцій чи схем.

Основні етапи дослідження корисних копалин і моделювання процесів збагачення, як правило, такі:

- збір апріорної інформації про сировину, пошук аналогів,
- розробка схеми обробки проб і дослідження властивостей сировини (гранулометричний, фракційний, мінералогічний і хімічний склад, зольність, вологість, міцність руди, гідрофільно-гідрофобні властивості поверхні компонент та ін.),
- аналіз побудованих кривих збагачуваності,
- пошук можливих методів збагачення і розробка технологічної схеми (за даними виконаних аналізів і апріорною інформацією),
- вибір критеріїв ефективності прийнятих процесів збагачення,
- розробка плану експериментальних робіт,
- виконання експериментів, обробка отриманих даних і одержання моделей технологічних процесів збагачення,
- розробка з використанням отриманих моделей раціональних технологічних режимів процесів,
- експериментальна перевірка і коректування розробленої схеми і режимів на діючій фабриці, розробка вихідних даних для економічного аналізу переробки досліджуваної сировини.

Складність моделювання вихідної мінеральної сировини і самих процесів збагачення обумовлена їх багатофакторністю, ймовірним характером більшості технологічних процесів, постійною неконтрольованою зміною властивостей сировини, наявністю в сировині

частинок з проміжними властивостями (зростки), недосконалістю розділових процесів і т.д.

Випадковий характер причин, що впливають на процес, їхня масовість спричиняють необхідність використовувати для оцінки розділення сировини ймовірнісні характеристики. Усі технологічні показники збагачувальних процесів є, таким чином, не чим іншим, як інтегральними або усередненими характеристиками. Тому процеси збагачення найчастіше можуть адекватно описуватися тільки моделями зі статистично визначеними параметрами.

З цієї причини більшість досліджень у збагаченні проводяться на основі планування експериментів. Уперше у збагаченні цей метод застосував А.Доренфельд, який указував, що на збагачувальній фабриці є тільки одна постійна характеристика – мінливість факторів – і тільки статистичні методи дозволяють упорядкувати результати цього безладдя. За допомогою статистичної обробки можна оцінити ймовірність визначеного значення факторів і результатів збагачення. Тому статистичні методи моделювання процесів мають особливе значення в галузі збагачення корисних копалин.

Різноманіття технологій збагачення корисних копалин обумовлює необхідність обробки при моделюванні процесів таких основних типів числової інформації:

- характеристики вхідних матеріальних та енергетичних потоків сировини, реагентів і т.п., напр., густина мінералів, реагентів, твердість мінералів, їх гранулометричний і фракційний склад тощо, – характеристики устаткування – питома продуктивність, робоча площа (об'єм), установлена потужність електродвигунів і т.п., – параметри процесу – густина і в'язкість пульпи, розпушеність постелі, витрата реагентів, температура і т.п.,

- вміст компонентів у сировині, промпродуктах, концентраті і відходах,

- технологічні показники – вихід продуктів, вилучення, якість кінцевих продуктів, коефіцієнт збагачення, селективності та ін.,

- економічні показники – собівартість продукції, рентабельність виробництва, строк окупності, основні витрати, енергоємність процесу та ін.,

- *екологічні показники* – вміст шкідливих викидів у відходах, скидній воді, оборотній воді, викидах у атмосферу тощо.

До апіорної (первинної) інформації, яку вивчають при моделюванні технологічних процесів, відносять, зокрема, дані про тип, марку сировини, її речовинний склад, існуючі способи збагачення подібної сировини, характеристики машин тощо. До апіорних даних зараховують також увесь попередній досвід і технологічні знання, що дозволяють до початку експерименту вибрати відповідні варіанти схем і режимів збагачення. Іншими словами, апіорна інформація дозволяє попередньо вибрати раціональну *експериментальну область*.

Після збору апіорної інформації про досліджувану сировину й обґрунтування аналогів (сировина – технологія) проводять *попередні* дослідження, що включають мінералогічний, фракційний, гранулометричний аналізи, а також деякі визначення фізичних властивостей матеріалів, лабораторні, стендові технологічні експерименти по збагаченню мінеральної сировини. Результати цих досліджень дозволяють уточнити раціональну *експериментальну область*, створити факторні та феноменологічні моделі процесів, попередньо рейтингувати фактори за значимістю, виділивши групи найбільш і найменш значимих.

Крім того, збір апіорної інформації дозволяє прийняти рішення про застосування того чи іншого методу моделювання процесів збагачення або вибрати декілька методів моделювання.

РОЗДІЛ 2 ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ

2.1 Теорія подібності

Теорія подібності дає можливість вивчати складні процеси і теоретично, й експериментально. Але, тільки чисте експериментування, без теоретичних узагальнень, не дозволяє розповсюдити висновки, отримані таким шляхом, на інші недосліджені випадки. З іншого боку – тільки теоретичний метод не може охопити усього різноманіття умов фізичного процесу і, крім того, дуже часто приводить до складних математичних рівнянь, які важко розв'язати.

Труднощі, що зустрічаються при вирішенні багатьох задач за допомогою диференціальних рівнянь з частковими похідними, примусили шукати необхідні рішення експериментальним шляхом.

За дослідними даними, які отримані на одному апараті, робились приблизні висновки про можливу роботу іншого, – такого ж, але більшого за габаритами апарата. Це й привело до ідеї моделювання процесів і апаратів на основі теорії подібності.

Теорія подібності – наука про подібність явищ.

Основні технологічні процеси у збагаченні корисних копалин протікають, головним чином, внаслідок руху в'язких (стисливих і нестисливих) рідин, а також в результаті теплообміну і дифузії, внаслідок чого при їхньому моделюванні особливе значення мають гідродинамічна, тепла і дифузійна подібність.

Тому перш ніж перейти до розгляду теорії подібності і методу аналізу розмірностей необхідно розглянути рівняння гідродинаміки, теплообміну і дифузії.

2.1.1 Рух в'язкої рідини

Розглянемо несталий рух рідини, при якому швидкості і тиски в кожній точці потоку змінюються з часом.

Виділимо в потоці рухомої рідини елементарний паралелепіпед з ребрами dx , dy і dz (рис. 2.1).

Внаслідок нерозривності потоку, увесь об'єм виділеного паралелепіпеда буде постійно заповнений рухомою рідиною. При цьому маса стисливої рідини, яка надходить і виходить з паралелепіпеда, у

загальному випадку буде різна, що обумовлено непостійністю величин швидкості w і густини ρ .

Через ліву грань A , паралельну площині YOZ , рідина рухається під впливом складової швидкості v_x , паралельної вісі OX . Будемо вважати цю складову, а також густину ρ постійними в усіх точках цієї грані і рівними їхнім значенням у точці A :

$$v_x = f_1(x, y, z, t),$$

$$\rho = f_2(x, y, z, t),$$

де t – час.

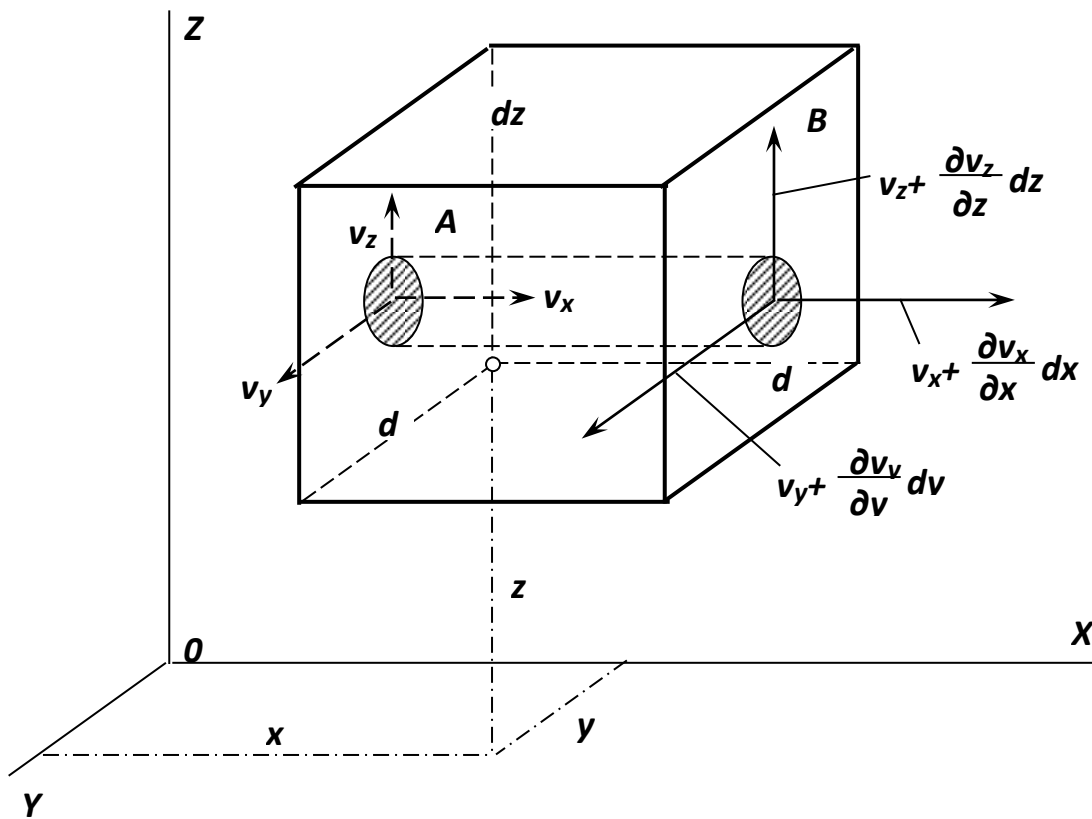


Рисунок 2.1 – Елемент рідини у русі.

У той же момент часу для протилежної правої грані B ці величини будуть:

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx; \quad \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx.$$

Через площадку $dydz$ лівої грані за одиницю часу витікає кількість рідини (в одиницях маси):

$$dM_{x_1} = \rho v_x dydz.$$

Маса рідини, що витікає через протилежну грань за цей час буде:

$$dM_{x_2} = \left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx \right] dydz.$$

Таким чином, приріст маси рідини за одиницю часу у паралелепіпеді, є причиною різниці значень v_x і ρ на лівій і правій його гранях, він дорівнює:

$$\Delta M_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dydz.$$

Аналогічно отримуємо для напрямків перпендикулярних осям OY і OZ :

$$\Delta M_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) dx dydz;$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dx dydz.$$

Повний приріст маси рідини в паралелепіпеді за одиницю часу буде:

$$\Delta M = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] dx dydz. \quad (2.1)$$

При нерозривності потоку зміна маси в об'ємі $dx dydz$ спричиняється зміною густини рідини у цьому об'ємі, тобто:

$$\Delta M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dydz. \quad (2.2)$$

Після прирівнювання рівнянь (2.1) і (2.2) і ділення на $dx dy dz$ отримуємо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (2.3)$$

Отримане рівняння називається рівнянням нерозривності або суцільності.

У окремих випадках рівняння суцільності приймає такий вигляд:

– для краплинної рідини ($\rho = \text{const}$):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

або у векторній формі:

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Тобто, при нерозривному русі рідини об'єм її, який втікає у деяку обмежену частину простору, дорівнює об'єму, який витікає з нього за той же час;

– для однорідного газу [$\rho = f_2(t)$]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

або у векторній формі:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$$

– для сталого руху $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0,$$

або у векторній формі:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

З рівняння (2.3) за умови $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ знаходимо, що для даного простору при сталому русі рідина не змінює своєї маси, тобто маси рідини, яка втікає і витікає, рівні між собою.

В будь якій точці рухомого потоку повинна мати місце рівновага сил, які обумовлюють рух. Такими силами є сила ваги, сили тиску (перепад тиску) і сили тертя. Для одержання рівняння руху виділимо у рідині, яка знаходиться в русі, елементарний паралелепіпед об'ємом dW з ребрами dx , dy і dz .

Знаходимо проекції на вісь OX (рис. 2.2) сили ваги, сили тиску і сили тертя, які діють на цей елементарний об'єм.

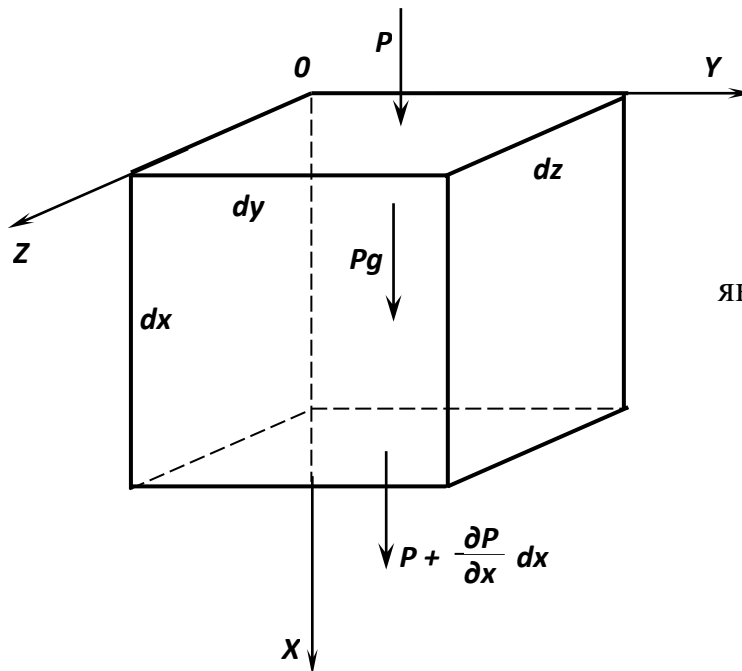


Рисунок 2.2 – Сили, які діють на елементарний об'єм рідини.

Для сили ваги, яка прикладена в центрі ваги елемента dW , маємо:

$$g_x \rho dW = g_x \rho dx dy dz, \quad (2.4)$$

де g_x – проекція прискорення сили ваги (м/с^2) на OX .

Позначимо питомий тиск рідини p кг/м^2 , тоді сила тиску рідини на верхню грань елемента буде дорівнювати $pdydz$, а на нижню:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz,$$

де $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ – зміна гідростатичного тиску в напрямку осі OX по всій довжині ребра dx ; ця сила діє проти напрямку руху рідини.

Проекція рівнодіючої сил тиску буде:

$$pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dydz. \quad (2.5)$$

Дію сили тертя розглянемо спочатку на прикладі руху плоского ламінарного потоку, в якому проекція швидкості v_x залежить тільки від y . У цьому випадку сила тертя виникає тільки на бокових гранях елемента.

Напрямки і величина сил тертя показані на рисунку 2.3.

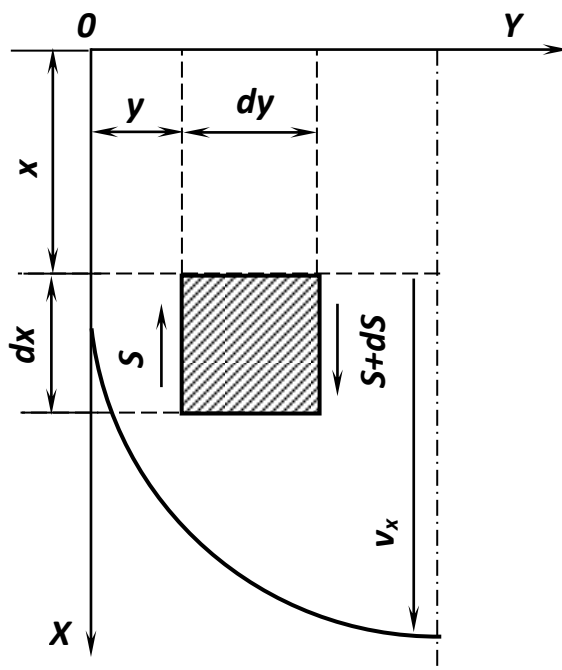


Рис. 2.3 – Напрямки і величина сил тертя.

У перетині y сила тертя дорівнює $-S dx dz$ і направлена проти руху, тому що швидкість рідини тут менше, ніж у самому елементі. В перетині $y+dy$ сила тертя дорівнює :

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz$$

і направлена у бік руху, оскільки у цьому випадку швидкість рідини більша, ніж у самому елементі.

Проекція рівнодіючих цих сил визначається як:

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz - S dx dz = \frac{dS}{dy} dx dy dz, \quad (2.6)$$

де S – сила тертя на одиницю поверхні.

Але за законом Стокса

$$S = \mu \frac{dw_x}{dy}, \quad (2.7)$$

де μ – в'язкість середовища.

Після сумісного рішення рівнянь (2.6) і (2.7) маємо:

$$\frac{dS}{dy} dW = \mu \frac{d^2 v_x}{dy} dW.$$

У загальному випадку, коли швидкість v_x змінюється в усіх трьох напрямках, проекція сили тертя на вісь OX буде:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dW = \mu \nabla^2 v_x dW, \quad (2.8)$$

де символ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, який позначає суму

других часткових похідних від проекції швидкості на вісь OX .

Сумуючи проекції (2.4), (2.5) і (2.8), отримуємо проекцію рівнодіючої усіх сил, прикладених до об'єму dW , на вісь OX :

$$\left[\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] dW. \quad (2.9)$$

Ця рівнодіюча дорівнює добутку маси елемента dW на його прискорення $\frac{Dv_x}{dt}$:

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} dW = \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] dW. \quad (2.10)$$

Символ $\frac{Dv_x}{dt}$ називається повною або субстанціональною похідною v_x по t . Цю похідну слід розуміти таким чином: швидкість зміни v_x в даній точці характеризується частковою (або локальною) похідною v_x по t :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(M, t + \Delta t) - v_x(M, t)}{\Delta t}, \quad (2.11)$$

де M позначає будь яку постійну геометричну точку у просторі.

Щоб охарактеризувати зміну v_x для даної частинки рідини за проміжок часу Δt , слід за приріст v_x прийняти різницю між значеннями функції v_x в момент $t + \Delta t$ в тому положенні частинок M' , в якому вона знаходиться у той момент, і значенням функції v_x в момент t у початковому положенні її M . Межа відношення цього прирощення до Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ й називається субстанціональною похідною.

Зв'язок між частковою і повною похідними полягає у тому, що, коли складається повна похідна від функції $v(x, Y, Z, t)$ вважають x, y, z функціями від t , тому що частинка, яка мала в момент t координати x, y, z , за час Δt переміститься по деякій кривій.

З використанням рівнянь (2.9) і (2.10) отримуємо:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (2.12)$$

Аналогічно отримуємо рівняння для рівнодіючих проекцій сил на вісі OY і OZ .

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.14)$$

Рівняння (2.12), (2.13) і (2.14) утворюють систему диференціальних рівнянь руху нестисливої рідини Нав'є-Стокса; ця система справедлива як для ламінарного, так і для турбулентного руху.

Якщо в'язкість μ постійна, рівняння (2.12), (2.13) і (2.14) можна звести до одного векторного:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathcal{G} \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.15)$$

де $\mathcal{G} = \frac{\mu}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, м²/с.

Рівняння Нав'є-Стокса можуть бути отримані також і для стисливих рідин. Рівняння відносно вісі OX має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p'}{\partial x} + \\ + \mu \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Такі ж рівняння мають місце у напрямках OY і OZ .

До цих рівнянь додаємо ще й рівняння теплового балансу. Тепло, яке надходить у одиничний об'єм при сталому стані, дорівнює такій же кількості тепла, що видаляється з цього ж об'єму. До даного об'єму, так як і в рівнянні (2.12), тепло підводиться внаслідок теплопровідності і за допомогою матеріальних частинок, які протікають через одиничний об'єм при одночасному його охолодженні. Якщо температура τ цього об'єму не змінюється з часом, то спільна кількість підведеного тепла повинна дорівнюватися нулю, і якщо врахувати наявність джерела тепла з інтенсивністю q_i (ккал/м³), то отримуємо таке рівняння:

$$c\rho\left(v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right) + q_i, \quad (2.17)$$

де c – теплоємність, ρ – густина, λ – теплопровідність.

У лівій частині рівняння (2.17) представлена кількість тепла в одиничному об'ємі, яке використовується для нагрівання на $d\tau$ частинок, що протікають через паралелепіпед з ребрами dx , dy , dz . Це тепло покривається за рахунок підводу тепла з оточуючого середовища (перший член правої частини рівняння) і за рахунок джерела тепла q_i . Після ділення обох частин рівняння на $c\rho$ отримаємо:

$$v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right) + \frac{q_i}{c\rho}, \quad (2.18)$$

або у векторній формі:

$$(\vec{v}, \text{grad} \tau) = a \nabla^2 \tau + \frac{q_i}{c\rho}. \quad (2.19)$$

Система з п'яти диференціальних рівнянь (2.3), (2.12), (2.13), (2.14) і (2.18) з частковими похідними сумісно з межовими і початковими умовами повністю описує процес руху в'язкої рідини.

Поблизу стінок потік є ламінарним, відповідно, передача тепла відбувається в результаті теплопровідності:

$$dq = -\lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F dF, \quad (2.20)$$

де dF – поверхня теплообміну; n – нормаль до dF ;

$\left(\frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F$ – температурний градієнт рідини безпосередньо біля стінки.

Кількість тепла, що передається звичайно виражають за допомогою коефіцієнта тепловіддачі α (ккал/м²·год·град), з використанням формули Ньютона:

$$Q = \alpha(\tau_F - \tau_0)F\tau, \text{ ккал}, \quad (2.21)$$

або

$$\frac{Q}{t} = q = \alpha(\tau_F - \tau_0)F, \text{ ккал/год.} \quad (2.22)$$

Незважаючи на те, що коефіцієнт тепловіддачі не входить у рівняння (1.3) – (2.20), він часто застосовується у теплових розрахунках. Після диференціювання рівняння (2.22) отримуємо:

$$dq = \alpha(\tau_F - \tau_0)dF = -\lambda\left(\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)_F dF, \quad (2.23)$$

де τ_F – температура стінки; τ_0 – температура рідини.

Таким чином, маємо:

$$\alpha = -\frac{\lambda\left(\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)_F}{\tau_F - \tau_0}. \quad (2.24)$$

Ця залежність дозволяє коефіцієнт тепловіддачі α ввести у систему диференціальних рівнянь для конвективної теплопередачі. Оскільки температурний градієнт $\left(\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)_F$ у формулі (2.24) залежить від температур стінки і рідини і від товщини пограничного шару, тобто від характеру (режиму) руху, то, відповідно, й коефіцієнт тепловіддачі α залежить від усіх величин, які містяться в рівняннях (2.3) – (2.20).

2.1.2 Умови застосування теорії подібності

У випадку *геометричної подібності* двох фігур відношення усіх відповідних розмірів цих фігур постійне. Геометричні фігури подібні між собою, якщо їхні відповідні кути рівні, а сторони пропорційні, тобто:

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{l'_3}{l_3} = A, \quad (2.25)$$

де A – коефіцієнт пропорційності, або константа подібності.

Таким чином, умова (2.25) є математичним формулюванням геометричної подібності двох фігур (моделі і виробничого апарата).

У двох кінематичних схемах буде мати місце *кінематична подібність*, якщо їхні схожі частинки переміщуються по геометрично подібним шляхам в проміжки часу, що відрізняються постійним множником, тобто у цьому випадку можна говорити про подібність руху, наприклад двох потоків рідини. При *динамічній подібності* багатокутники сил, побудовані для пари схожих частинок, розташованих подібним чином у просторі і часі, повинні бути подібні, тобто розрізнятися тільки масштабом. Поняття подібності можна також поширити на теплові і фізико-хімічні процеси.

З використанням цього поняття можна вирішити багато практично важливих задач. Але для використання понять про подібність необхідно знайти умови подібності явищ, які розглядаються. При цьому виникають такі питання:

- чи можна відомі експериментальні дані, наприклад, такі, що пов'язані з температурним полем, отримані шляхом вимірювання на одному апараті (на моделі), перенести на інший апарат (виробничий);
- які повинні бути умови, що допускають таке перенесення або перерахунок;
- що слід зробити, щоб отримані під час експерименту на моделі дані були правильно застосовані для виробничого апарата.

Перенесення експериментальних даних з моделі на виробничий апарат можливе у таких випадках, де існує подібність обох процесів. Ця подібність не повинна обмежуватися тільки геометричними формами; усі інші величини, які впливають на процес, повинні в моделі і у промисловому апараті знаходитися у визначених відношеннях.

Визначення умов подібності здійснюється таким чином: порівнюються такі два випадки, при яких потоки для усіх величин, що зустрічаються в рівняннях (2.3) – (2.24), подібні.

1. Такими є координати x, y, z промислового апарата, які відносно x', y', z' моделі можуть бути рівномірно збільшені. Отже порівнюються потоки, які проходять через геометрично подібні тіла або навколо них. Тоді усі відрізки потоку $l_1, l_2, l_3 \dots$ виробничого апарата, які відповідають $l'_1, l'_2, l'_3 \dots$ моделі, будуть збільшені у визначеній пропорції:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \dots = \frac{l'}{l} = A_l. \quad (2.26)$$

Кути між відповідними відрізками залишаються незмінними.

2. Поле швидкостей у промисловому апараті і моделі повинно бути подібним. У відповідних точках з координатами x', y', z' і x, y, z відношення

$$\frac{v'}{v} = A_v, \quad (2.27)$$

повинно бути однаковим, і крім того, напрямки відповідних швидкостей промислового апарата і моделі повинен бути одним і тим же (рівність кутів). Отже не можна намагатися знайти подібність між ламінарним і турбулентним потоками, тому що розподіл швидкостей в обох потоках різний. Можна порівнювати тільки ламінарні потоки між собою і турбулентні потоки між собою.

3. Наступною важливою величиною є температурний градієнт $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \frac{\partial \tau}{\partial y}, \frac{\partial \tau}{\partial z}$. Розподіл градієнтів повинний бути подібним, тобто:

$$\frac{\partial \tau' / \partial x'}{\partial \tau / \partial x} = \frac{\partial \tau' / \partial y'}{\partial \tau / \partial y} = \frac{\partial \tau' / \partial z'}{\partial \tau / \partial z} = A_{grad \tau}. \quad (2.28)$$

З рівнянь (2.26) і 2.28) маємо:

$$d\tau' = A_{grad \tau} \cdot A_l d\tau = A_\tau d\tau, \quad (2.29)$$

де

$$A_{grad \tau} \cdot A_l = A_\tau. \quad (2.30)$$

Після інтегрування рівняння (2.29) отримуємо:

$$\tau' - \tau'_0 = A_\tau (\tau - \tau_0), \quad (2.31)$$

або

$$\frac{\tau' - \tau'_0}{\tau - \tau_0} = A_\tau, \quad (2.32)$$

де температури τ'_0 і τ_0 – довільні постійні інтегрування для відповідних, але довільно вибраних точок x'_0 , y'_0 , z'_0 і x_0 , y_0 , z_0 . В моделі і промисловому апараті температури τ'_0 і τ_0 можуть бути вибрані, наприклад, поблизу вводу в трубопровід або на великій відстані від стінки залежно від доцільності. В рівняння подібності температурних полів входять, таким чином, не власне температури, а їхні різниці по відношенню до температури вибраної точки.

З рівнянь (2.26), (2.28) і (2.29) випливає:

$$\frac{\partial \tau' / \partial x'}{\partial \tau / \partial x} = \frac{A_\tau}{A_l}; \quad \frac{\partial^2 \tau' / \partial x'^2}{\partial^2 \tau / \partial x^2} = \frac{A_\tau}{A_l^2}. \quad (2.33)$$

У багатьох випадках має значення дотримання подібності градієнтів концентрацій в матеріальних потоках, які проходять через апарати. Умови подібності концентраційних і температурних градієнтів аналогічні.

4. Статичний тиск представлений у диференціальних рівняннях зокрема у вигляді градієнтів $\frac{\partial p}{\partial x}$; за аналогією з температурним полем можна написати умови подібності для поля тиску:

$$\frac{p' - p'_0}{p - p_0} = A_p. \quad (2.34)$$

5. Подібність полів фізичних властивостей середовища обумовлює такі постійні співвідношення для усіх відповідних точок виробничого (промислового) апарата і моделі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha'}{\alpha} = A_\alpha; \quad \frac{\rho'}{\rho} = A_\rho; \quad \frac{g'}{g} = A_g \\ \frac{c'}{c} = A_c; \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = A_\lambda; \quad \frac{\mu'}{\mu} = A_\mu \end{aligned} \right\}. \quad (2.35)$$

Слід відмітити, що при виконанні умов подібності не всі масштабні множники (числа) (2.28) – (2.35) можуть бути довільно вибрані. Інші визначаються після вибору деяких небагатьох основних величин. Тобто число незалежних масштабних множників у порівнянні з наведеними у

рівняннях (2.26) – (2.35) може суттєво скоротитися внаслідок додаткових умов.

Якщо дві системи подібні, то в межах кожної системи відношення будь-яких схожих величин, що характеризують той або інший стан, є безрозмірним і постійним для обох систем. Так, наприклад, фізичний стан однієї із систем характеризується деякими величинами R_1, R_2, \dots, R_n , а іншої подібної системи – величинами r_1, r_2, \dots, r_n . Тоді умова подібності потребує рівності:

$$R_1/R_2 = r_1/r_2 = i. \quad (2.36)$$

Тобто відношення схожих величин в одній системі дорівнює їхньому відношенню в подібній системі. Ці постійні безрозмірні відношення називаються *інваріантами подібності* і позначаються символом i .

Інваріанти подібності, які є відношеннями простих однорідних величин, наприклад, лінійних розмірів l/d , тисків p_1/p_2 , в'язкостей μ_1/μ_2 і т.п., називаються *симплексами подібності*.

Інваріанти подібності можуть бути виражені й більш складними безрозмірними відношеннями, складеними з декількох простих параметрів, наприклад $dV\rho/\mu$. У цьому випадку вони називаються критеріями подібності, які можуть бути визначальними і невизначальними. Визначальними критеріями є такі, у яких величини задані наперед умовами однозначності. Критерії, що містять шукану величину, називаються невизначальними.

В основі теорії подібності лежать три теореми, які формулюються таким чином:

I теорема. Якщо фізичні процеси подібні один одному, однойменні критерії подібності цих процесів мають однакову величину.

II теорема. Рівняння, які описують фізичні процеси, можуть бути представлені у вигляді функціонального зв'язку між критеріями подібності.

III теорема. Для того щоб фізичні процеси були подібні один одному, необхідно і достатньо, щоб ці процеси були якісно однакові, а їхні однойменні визначальні критерії – чисельно однакові.

2.1.3 Диференціальні рівняння теплообміну для моделі

Диференціальні рівняння теплообміну для моделі напишемо у відповідності з рівняннями п. 2.1.1 але у даному випадку усі вхідні величини забезпечимо штрихами, на відміну від величин для виробничого апарата [9, 11].

Вважаючи, що $q_i = q'_i = 0$, отримуємо (для осі OX'):

$$\frac{\partial(\rho'v'_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho'v'_y)}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho'v'_z)}{\partial z'} = 0; \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \rho' \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) &= \rho' g'_x - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \\ &+ \mu' \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Подібні рівняння можна скласти й для проекцій на вісі OY' і OZ' . Аналогічно рівнянню (2.18) маємо:

$$v'_x \frac{\partial \tau'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \tau'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial \tau'}{\partial z'} = a' \left(\frac{\partial^2 \tau'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z'^2} \right); \quad (2.39)$$

$$\alpha = - \frac{\lambda' \left(\frac{\partial \tau'}{\partial \dot{i}'} \right)_F}{\tau'_F - \tau'_0}. \quad (2.40)$$

У ці рівняння відповідно до співвідношень (2.28) – (2.35) можна підставити $x' = A_i x$, $v' = A_v v$, $\rho' = A_\rho \rho$, де величини без штриха відносяться до виробничого апарата. Таким чином, з рівняння (2.37) отримуємо:

$$\frac{A_\rho A_v}{A_l} \rho \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0, \quad (2.41)$$

а з рівняння (2.38) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{A_\rho A_v^2}{A_l} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) &= A_\rho A_g \rho g_x - \frac{A_p}{A_l} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{A_\mu A_v}{A_l^2} \mu \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Аналогічні рівняння отримують і для напрямків OY і OZ . З рівняння (2.39) маємо:

$$A_v \frac{A_\tau}{A_l} \left(v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + \dots \right) = \frac{A_\lambda A_\tau}{A_c A_\rho A_g A_l^2} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \dots \right), \quad (2.43)$$

а з рівняння (2.40) отримуємо:

$$A_\alpha \alpha = - \frac{A_\lambda}{A_l} \cdot \lambda \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F}{\tau_F - \tau_0}. \quad (2.44)$$

Подібними вважають тільки такі процеси, для яких масштабні значення A_l , A_v , A_τ та ін. є такими, що множники, які стоять перед дужками в рівняннях (2.41) – (2.44) однакові, тобто:

$$\frac{A_\rho A_v^2}{A_l} = A_\rho A_g = \frac{A_p}{A_l} = \frac{A_\mu A_v}{A_l^2}; \quad (2.45)$$

$$A_v \frac{A_\tau}{A_l} = \frac{A_\lambda A_\tau}{A_c A_\rho A_g A_l^2}; \quad (2.46)$$

$$A_\alpha = \frac{A_\lambda}{A_l}. \quad (2.47)$$

Отже, якщо чисельні значення задовольняють рівнянням (2.45) – (2.47), то в рівняннях (2.41) – (2.44) масштабні множники можуть бути скорочені і для моделі залишається система диференціальних рівнянь, які повністю ідентичні рівнянням для виробничого апарата, а саме – рівнянням (2.3), (2.12), (2.13), (2.16), і (2.18).

Інтеграли диференціальних рівнянь для апарата і моделі також будуть ідентичні. Це означає, що тільки у цьому випадку поширення потоків з швидкісними і температурними полями у просторі моделі і промислового апарата відбувається однаково.

Звідси витікає наступне положення: подібними процесами теплообміну у сталому стані при відсутності джерел тепла є тільки такі, у яких масштабні множники задовольняють рівнянням (2.45) – (2.47). Таким чином, з числа масштабних множників п'ять виражаються через інші за допомогою рівнянь (2.45) – (2.47).

Далі представимо рівняння (2.45) – (2.47) в більш зручній формі – у вигляді рівнянь в критеріях подібності.

2.1.4 Гідродинамічна подібність

Для з'ясування умов, при дотриманні яких рівняння руху будуть подібні, або рухи подібні, розглянемо рівняння Нав'є-Стокса (2.12) – (2.14) для випадку плоского потоку в безрозмірному вигляді. За масштаб довжини вибираємо будь-який характерний розмір тіла (напр., діаметр або радіус труби), а за масштаби швидкостей, тисків, густин, температур та ін. – їхні характерні значення (на нескінченності, середні за об'ємними, масовими витратами та ін.) [9].

Позначимо безрозмірні величини тими ж буквами, що й розмірні, але з ризикою і зробимо таку заміну:

$$x = l\bar{x}, \quad y = l\bar{y}, \quad \rho = \rho_0\bar{\rho}, \quad v_x = V_0\bar{v}_x, \quad v_y = V_0\bar{v}_y, \\ \vartheta = \vartheta_0\bar{\vartheta}, \quad t = t_0\bar{t}, \quad X = g\bar{X}, \quad Y = g\bar{Y}, \quad p = p_0\bar{p}.$$

За масштаб часу прийнятий час, характерний для даного руху, а за масштаб масових сил, віднесених до одиниці маси, – прискорення сили тяжіння.

Після підстановки вказаних величин у рівняння (2.12) – (2.14) одержимо рівняння плоского руху і рівняння нерозривності для нестисливої рідини у безрозмірній формі:

$$\begin{aligned}
& \frac{V_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l} \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \right) = g \bar{X} - \frac{p_0}{\rho_0 l} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{g_0 V_0}{l^2} \bar{g} \nabla^2 \bar{v}_x; \\
& \frac{V_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l} \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) = g \bar{Y} - \frac{p_0}{\rho_0 l} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{g_0 V_0}{l^2} \bar{g} \nabla^2 \bar{v}_y; \\
& \frac{V_0}{l} \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.48}$$

Розділимо перші два рівняння на $\frac{V_0^2}{l}$, а третє на $\frac{V_0}{l}$ і опустимо для простоти риси над безрозмірними величинами, після чого отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{l}{V_0 t_0} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{gl}{V_0^2} X - \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g_0}{V_0 l} g \nabla^2 v_x; \\
& \frac{l}{V_0 t_0} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{gl}{V_0^2} Y - \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g_0}{V_0 l} g \nabla^2 v_y; \\
& \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

З цієї системи рівнянь витікає, що якщо два потоки подібні, тобто вони описуються однаковими рівняннями з однаковими граничними (крайовими) і початковими умовами, представленими в безрозмірному вигляді, то для них повинні бути однаковими за величиною такі безрозмірні величини, які мають свої власні назви:

$\frac{l}{V_0 t_0} = Sh$ – число Струхала характеризує залежність складових інерційних сил від часу;

$\frac{V_0}{\sqrt{gl}} = Fr$ – число Фруда відбиває відношення сил інерції до сил гравітації;

$\frac{P_0}{\rho V_0^2} = Eu$ – число Ейлера відбиває відношення сил тиску й сил інерції;

$\frac{V_0 l}{\nu} = Re$ – число Рейнольдса відбиває відношення сил інерції й в'язкості.

Для повного моделювання необхідна повна подібність процесів, тобто рівність чисел подібності. При використанні даних, отриманих на моделі, повинні бути виконані для всіх відповідних точок на моделі і у виробничому апараті три умови:

$$Re = \text{idem}; \quad Eu = \text{idem}; \quad Sh = \text{idem}. \quad (2.49)$$

Однак теорія і практика показують, що при однорідних потоках в моделі і виробничому апараті встановлюються такі профілі швидкостей, які подібні між собою. Тому, для того щоб упевнитися в подібності процесів, немає необхідності перевіряти наявність умов (2.49) для усіх подібних точок. Якщо, наприклад, у трубопроводі по його осі знайдено, що $Re = \text{idem}$ для виробничого апарата і моделі, то відповідно цьому $Re = \text{idem}$ також для інших точок перетину потоку. Однорідними потоками називають такі, які мають подібні режими руху (турбулентний, ламінарний), початкові умови (профіль швидкостей на вході у апарат), крайові умови. Остання умова у відношенні до швидкостей завжди виконується внаслідок того, що швидкості біля стінки як у моделі, так і у виробничому апараті завжди рівні нулю.

Інші умови подібності – *геометрична подібність* (у тому числі й шорсткість поверхні) та інші повинні бути також виконані. Але виникає питання: чи можливе взагалі дотримання усіх умов подібності і якщо так, то при яких обставинах.

Якщо, наприклад, при протіканні рідини в трубопроводі з'являються вільні поверхні рідини, то для їхнього врахування було б необхідно ввести додаткові умови подібності, які визначаються фізичними законами їхнього утворення. Тобто при вільних поверхнях неможливо одночасно виконати усі умови подібності. Те ж саме відбудеться, якщо властивості речовини

(в'язкість, густина та ін.) не є постійними і змінюються з температурою вздовж потоку.

Для потоків, де ці труднощі не мають місця, число умов подібності можна скоротити, виходячи з наступних міркувань. Для стаціонарних процесів числа Sh не мають значення. Перепад тиску в потоці буде залежати від швидкісних характеристик потоку, тобто $Eu = f(Re)$. Таким чином, при вивченні руху рідини найбільш істотним буде число Re . Число Re має вирішальне значення при визначенні структури потоків (ламінарних і турбулентних). Структура потоку визначає процес переносу маси, кількості руху, тепла.

Тобто, як правило, використовують приблизне моделювання, при якому подібність зберігається за числами найбільш характерними для даного процесу.

2.1.5 Теплова подібність

Аналогічно гідродинамічній подібності розглянемо умови теплової подібності. По-перше розглянемо випадок чистої теплопровідності, тобто переносу тепла молекулярним способом без конвекції [11]. У цьому випадку рівняння переносу тепла має вигляд:

$$c_p \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \tau, \quad (2.50)$$

де c_p – питома теплоємність рідини.

Приведемо це рівняння до безрозмірного вигляду, для чого введемо такі безрозмірні величини:

$$c_p = \bar{c}_p c_{p0}; \quad \rho = \bar{\rho} \rho_0; \quad \tau = \bar{\tau} \tau_0; \quad \lambda = \bar{\lambda} \lambda_0; \quad x = \bar{x} l; \quad t = \bar{t} t_0,$$

де \bar{c}_p , $\bar{\rho}$, $\bar{\tau}$, $\bar{\lambda}$, \bar{x} , \bar{t} – безрозмірні величини; c_{p0} , ρ_0 , τ_0 , λ_0 , l , t_0 – характерні розмірні величини (масштаби).

$$\text{Розглянемо одномірний рух, тобто } \tau = \tau(t, x), \text{ тоді } c_p \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}$$

.

Після підстановки прийнятих співвідношень у рівняння переносу тепла отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{p0} \rho_0 \tau_0}{t_0} \bar{c}_p \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^2} &= \frac{\lambda_0 \tau_0}{l^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}, \\ \bar{c}_p \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\lambda_0}{c_{p0} \rho_0} \cdot \frac{t_0}{l^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}. \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{або} \\ (2.51) \end{array}$$

де $\alpha_\tau = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ – коефіцієнт температуропроводності, а

$\frac{\alpha_\tau t}{l^2} = \text{Fi}$ – число Фур'є, яке характеризує нестационарність процесу

молекулярного переносу тепла.

Далі розглянемо випадок конвективного переносу тепла. Для випадку одномірного сталого руху відповідне рівняння буде:

$$v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} = \alpha_\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

Після введення безрозмірних величин отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_0 \tau_0}{l} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\alpha_0 \tau_0}{l^2} \bar{\alpha}_\tau \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2} \\ \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\alpha_0 \tau_0}{V_0 l} \bar{\alpha}_\tau \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}. \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{або} \\ (2.52) \end{array}$$

Тобто для подібності процесів необхідно дотримуватися рівності величини $\frac{\alpha_0}{V_0 l}$, а зворотна їй величина називається числом Пекле.

$\frac{V_0 l}{\alpha_\tau} = Pe$ – *число Пекле* характеризує конвективний перенос тепла.

Очевидно, що малі значення числа Pe відповідають дуже малому конвекційному переносу у загальному переносі тепла. Отже, при значеннях чисел $Pe < 1$ спостерігається тільки молекулярний перенос, тобто теплопровідність, тоді як при великих значеннях числа Pe роль молекулярного переносу буде незначна.

Перенос тепла з поверхні F при різниці температур в потоці і на стінці

$\tau_l - \tau_w$ можна представити у вигляді:

$$Q = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial n} Ft = \alpha(\tau_1 - \tau_w) Ft, \quad (2.53)$$

де τ_1 – температура оточуючого середовища; τ_w – температура стінки; α – коефіцієнт теплопереносу.

Для густини теплового потоку маємо:

$$q = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial n} = \alpha(\tau_1 - \tau_w). \quad (2.54)$$

Запишемо рівняння (2.54) в безрозмірному вигляді:

$$-\frac{\lambda_0 \tau_0}{l} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{n}} = \alpha_0 \bar{\alpha} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w)$$

і після ділення на $\frac{\lambda_0 \tau_0}{l}$ одержимо:

$$-\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{n}} = \frac{\alpha_0 l}{\lambda_0} \bar{\alpha} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w),$$

звідси отримуємо число Нуссельта:

$$\frac{\alpha_0 l}{\lambda_0} = Nu \text{ – } \textit{число Нуссельта}, \text{ яке можна розглядати як відношення}$$

дійсного теплового потоку, який визначається величиною коефіцієнта

теплопереносу α , до питомого теплового потоку, що мав би місце в умовах чистої теплопровідності в шарі товщиною l , тобто:

$$Nu = \frac{\alpha}{\lambda/l}.$$

Якщо поділити число Pe на число Re , одержимо *число Прандтля*:

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{\vartheta_0}{\alpha_\tau} = \frac{\vartheta_0 \rho_0 c_p}{\lambda_0} = \frac{c_p \mu_0}{\lambda_0} = Pr. \quad (2.55)$$

Число Pr характеризує відношення двох характеристик молекулярного переносу: кінематичної в'язкості ϑ і коефіцієнта температуропровідності α_τ . Перенос імпульсу, пов'язаний з величиною ϑ , визначається різницею швидкостей, а перенос тепла, пов'язаний з величиною α_τ , визначається температурою. Отже, число Pr явно містить тільки величини, які визначають фізичні властивості середовища, і у дійсності характеризує відношення між полями швидкостей і температур. Тоді залежність $Nu = f(Re, Pr)$ можна трактувати таким чином: кількість тепла, яке переноситься (Nu) залежить від виду швидкісного поля (Re) і його зв'язку з полем температур (Pr).

Приведені вище рівняння дійсні тільки у тому випадку, якщо величини λ, c, ρ, μ, g та ін. по довжині потоку залишаються постійними, тому що тільки при цьому забезпечується постійність масштабних множників. Внаслідок того, що температура впливає на λ, ρ, μ , точне виконання умов подібності має місце дуже рідко.

2.1.6 Дифузійна подібність

Числа подібності для дифузійних процесів можна одержати з рівняння дифузії речовини [9, 11]. Для одномірного руху рівняння молекулярної дифузії має вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.56)$$

Після заміни у цьому рівнянні усіх величин безрозмірними і характерними значеннями (масштабами) отримуємо:

$$c = c_0 \bar{c}, \quad t = t_0 \bar{t}, \quad x = \bar{x} l;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \frac{D c_0}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \frac{D t_0}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \text{ або } (2.57)$$

Безрозмірне число $\frac{D t_0}{l^2}$ називається дифузійним числом Фур'є.

$\frac{D t_0}{l^2} = Fo$ – дифузійне число Фур'є аналогічне тепловому числу Фур'є, але характеризує нестационарність процесу молекулярного переносу речовини.

При конвекційному переносі речовини для одномірного руху скористаємося рівнянням:

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.58)$$

Після виконання аналогічних операцій маємо:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = \frac{D}{V_0 l} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2}.$$

$\frac{V_0 l}{D} = Pe_\partial$ – дифузійне число Пекле, яке подібно числу Re визначає структуру потоку.

Залежно від величини числа Pe_∂ у порівнянні з одиницею можна судити про характер переносу речовини. Якщо $Pe_\partial > 1$ молекулярною

дифузією можна знехтувати у порівнянні з конвекційним переносом речовини. Якщо $Pe_\partial < 1$, навпаки молекулярна дифузія є визначальною.

Ділення числа Pe_∂ на число Re дозволяє отримати *дифузійне число Прандтля* Pr_∂ :

$$\frac{Pe_\partial}{Re} = \frac{\vartheta_0}{D} = Pr_\partial. \quad (2.59)$$

Дифузійне число Прандтля характеризує відношення двох характеристик переносу: кінематичної в'язкості ϑ і коефіцієнта дифузії D .

Коефіцієнт кінематичної в'язкості у рухомих рідинах типу води складає біля 10^{-6} м²/с, а коефіцієнт дифузії молекул і йонів у водних розчинах має порядок $D = 10^{-9}$ м²/с, макромолекул – $D = 10^{-10}$ м²/с. Тому у воді і подібних до неї рідинах $Pr_\partial \approx 10^3$. При зростанні в'язкості коефіцієнт дифузії зменшується за законом:

$$D = \frac{const}{\vartheta}, \quad (2.60)$$

тому число Pr_∂ зі збільшенням в'язкості зростає пропорційно її квадрату. У в'язких рідинах число Pr_∂ досягає значення 10^6 й більше.

Запишемо рівняння переносу речовини стосовно до різниці концентрацій на стінці і в оточуючому середовищі:

$$W = -D \frac{\partial c}{\partial n} = \alpha_\partial (c_1 - c_w),$$

де α_∂ – коефіцієнт переносу маси; c_1 – концентрація речовини в оточуючому середовищі; c_w – концентрація речовини на стінці.

Після заміни у цьому рівнянні усіх величин безрозмірними і характерними значеннями (масштабами) отримуємо:

$$\left. \begin{array}{l} \text{або} \\ -\frac{Dc_0}{l} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{n}} = \alpha_\partial c_0 (\bar{c}_1 - \bar{c}_w) \end{array} \right\} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{n}} = \frac{\alpha_{\partial} l}{D} (\bar{c}_1 - \bar{c}_w)$$

З останнього рівняння отримуємо *локальне число Нуссельта*:

$$\frac{\alpha_{\partial} l}{D} = Nu_{\partial}. \quad (2.62)$$

Аналогічно тепловому числу Nu можна з використанням середнього коефіцієнта переносу речовини $\alpha_{cr,\partial}$ отримати середнє дифузійне число Нуссельта.

2.1.7 Подібність деяких часткових випадків переносу

Відомо, що на тіло, занурене у рідину діє гідростатична або архімедова сила. Її величина дорівнює вазі витиснутої тілом рідини і направлена у бік протилежний напрямку сил ваги [9]. Архімедова сила має важливе значення у тих випадках коли у рідинах є частинки з густиною, яка відрізняється від густини середовища. У цьому випадку критерієм подібності буде *число Архімеда*:

$$Ar = \frac{l^3}{g^2} g \frac{\rho - \rho_1}{\rho} = \frac{l^3}{g^2} g \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (2.63)$$

де ρ і ρ_1 – густини частинок і рідини.

Співвідношення між гравітаційними силами і сили в'язкості характеризує *число Галілея*:

$$Ga = \frac{gl^3}{g^2}. \quad (2.64)$$

Якщо зміна густини рідини спричинена зміною температури, то у цьому випадку критерієм подібності буде *число Грасгофа*:

$$Gr = \frac{l^3}{g^2} g \beta \Delta \tau, \quad (2.65)$$

де β – коефіцієнт об'ємного розширення, який визначається із співвідношення:

$$\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta \rho}{\Delta \tau}.$$

Для спільності найменувань доцільно число Грасгофа називати тепловим числом Архімеда.

Гідростатична сила може виникнути й при різниці концентрації домішки у середовищі. У цьому випадку критерієм подібності буде дифузійне число Архімеда:

$$Ar_{\partial} = \frac{l^3}{g^2} g \xi \Delta c, \quad (2.66)$$

де Δc – різниця концентрацій речовини у середовищі і на стінці; ξ – коефіцієнт (аналогічний β), який характеризує відносну зміну густини у залежності від концентрації:

$$\xi = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta \rho}{\Delta c}.$$

Динамічне, теплове і дифузійне числа Архімеда можуть бути одержані з відповідного аналізу рівняння руху у такому вигляді:

$$\rho \frac{dV}{dt} = g \Delta \rho - \rho g \beta \Delta \tau - \rho g \xi \Delta c + \mu \nabla^2 V. \quad (2.67)$$

Після виконання відповідних операцій з рівнянням (2.67) одержимо динамічне число Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha_1 l}{\mu}. \quad (2.68)$$

У тих випадках, коли в рідині великі сили поверхневого натягу, основним критерієм подібності буде число Вебера:

$$We = \frac{\rho V^2 l}{\sigma}, \quad (2.69)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

Число We виражає собою відношення сил інерції до сил поверхневого натягу. Число We має суттєве значення при вивченні процесів перемішування взаємно нерозчинних рідин. Імовірність дроблення крапель у мішалках визначається у залежності від числа We , представленого у вигляді:

$$We = \frac{\rho n^2 d^3}{\sigma}, \quad (2.70)$$

де n і d – число обертів і діаметр мішалки; σ – міжфазний натяг.

Зі збільшенням числа We діаметр крапель зменшується і міжфазна поверхня росте.

2.1.8 Узагальнення

Легко бачити, що теплове і динамічне числа Пекле за фізичним смислом і формою аналогічні числам Рейнольдса. Отже, можна ввести три числа Рейнольдса: динамічне, теплове і дифузійне:

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{V_0 l}{\vartheta_0}; \\ Re_\tau = Pe &= \frac{V_0 l}{\alpha_\tau}; \\ Re_\partial = Pe_\partial &= \frac{V_0 l}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

У знаменнику цих формул знаходяться відповідно кінематична в'язкість, температуропровідність і коефіцієнт дифузії, тобто величини, які залежать від в'язкості. Тому при зменшенні в'язкості усі числа Рейнольдса будуть рости, а при наближенні величини в'язкості до нуля динамічне,

теплове і дифузійне числа Рейнольдса будуть наближатися до нескінченності.

Аналогічно можна одержати динамічне, теплове і дифузійне числа Фур'є.

При вивченні теплових і дифузійних процесів суттєве значення мають числа Прандтля, які можна отримати, як відношення відповідних чисел Рейнольдса:

$$\left. \begin{aligned} Pr_{\tau} &= \frac{Re_{\tau}}{Re} = \frac{\vartheta}{\alpha_{\tau}}; \\ Pr_{\partial} &= \frac{Re_{\partial}}{Re} = \frac{\vartheta}{D}; \\ Pr_{зм} &= \frac{Re_{\partial}}{Re_{\tau}} = \frac{\alpha_{\tau}}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Перше число Прандтля називається тепловим, друге – дифузійним, третє – змішаним.

Перше число Прандтля являє собою відношення кінематичної в'язкості (перенесення імпульсу) і коефіцієнта температуропровідності (перенесення тепла). Таким чином, теплове число Прандтля явно містить тільки величини, що визначають фізичні властивості середовища, тобто характеризують співвідношення поля швидкостей і поля температур. Це значить, такі поля будуть подібні тільки при числі $Pr = 1$.

Аналогічні міркування можна повністю перенести на дифузійне число Прандтля. Воно характеризує співвідношення між полем швидкостей і полем концентрацій. А змішане число Прандтля – відношення температурного поля до поля концентрацій.

На завершення наведемо зведену таблицю чисел подібності процесів переносу кількості руху, тепла і речовини в рідинах і газах [9].

Таблиця 2.1 – Числа подібності процесів переносу

Число подібності	Прандтля	Архімеда	Нуссельта	Фур'є	Рейнольдса
Динамічне	–	$Ar = gl^3\Delta\rho/\nu^2\rho$	–	$Fu = \nu t/l^2$	$Re = Vl/\nu$
Теплове	$Pr_{\tau} = \nu/\alpha_{\tau}$	$Ar_{\tau} = gl^3\beta\Delta\tau/\nu^2$	$Nu_{\tau} = \alpha l/\lambda$	$Fu_{\tau} = \alpha_{\tau}/l^2$	$Re_{\tau} = Vl/\alpha_{\tau}$
Дифузійне	$Pr_{\partial} = \nu/D$	$Ar_{\partial} = gl^3\xi\Delta c/\nu^2$	$Nu_{\partial} = \alpha_{\partial}l/D$	$Fu_{\partial} = Dt/l^2$	$Re_{\partial} = Vl/D$

Приклад 2.1. Для проведення досліджень розрахувати модель тракту суспензії, що тече по трубопроводу у бак кондиційної суспензії.

Поведінка потоку в даному випадку може бути описана рівнянням Нав'є-Стокса і рівнянням нерозривності. Розглянемо випадок одномірного руху:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Перший член рівняння Нав'є-Стокса при сталому русі дорівнює нулю $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$, рівняння нерозривності $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$ також додаткових умов не вносить. Перепишемо перше рівняння у безрозмірній формі:

$$\frac{V_0^2}{l_0} \cdot \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}'} = g_0 \bar{X}' - \frac{p_0}{\rho_0 l_0} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}'} \cdot \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{g_0 u_0}{l_0^2} \cdot \bar{g}' \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}'^2}.$$

Після перетворення маємо:

$$\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}'} = \frac{Ga}{Re^2} \cdot \bar{X}' - Eu \cdot \frac{1}{\bar{\rho}'} \cdot \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{1}{Re} \cdot \bar{g}' \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}'^2}.$$

Таким чином, маємо три критерії подібності: Галілея $Ga = \frac{gl^3}{g^2}$,

Ейлера $Eu = \frac{p}{\rho V^2}$ і Рейнольдса $Re = \frac{Vl}{g}$. Отже швидкість потоку є

функцією п'яти параметрів:

$$u = f(\rho, g, p, V, l).$$

Перевіряємо, чи достатня кількість критеріїв подібності, для чого записуємо розмірності усіх величин, що входять в три критерії, що отримані: $[\rho] = [\text{кг}/\text{м}^3]$; $[\vartheta] = [\text{м}^2/\text{с}]$; $[p] = [\text{Па}] = [\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2]$; $[V] = [\text{м}/\text{с}]$; $[l] = [\text{м}]$.

Основних розмірних величин $m = 3$ (кг, м, с); число критеріїв подібності повинно бути:

$$n = k + 1 - m,$$

де k – число параметрів, від яких залежить швидкість потоку u , у цьому прикладі $k = 5$, це ρ, ϑ, p, V, l , тоді $n = 5 + 1 - 3 = 3$. Тобто рішення вірно і кількість критеріїв подібності достатня для розрахунку моделі.

Величини показників тракту суспензії (натури) наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Величини показників тракту суспензії (натури)

Показник	Позначення	Од. вимір.	Величина
Густина суспензії	ρ_n	кг/м ³	1800
Кінематичний коефіцієнт в'язкості суспензії	ϑ_n	м ² /с	$1,15 \cdot 10^{-6}$
Лінійний розмір (діаметр трубопроводу)	l_n	м	0,15
Швидкість течії суспензії в трубопроводі	V_n	м/с	3,0
Тиск в трубопроводі	p_n	МПа	0,2

Розрахунок моделі виконується з урахуванням рівності критеріїв подібності натури і моделі. Як моделюючу рідину вибираємо, наприклад, гас з густиною $\rho_m = 800 \text{ кг}/\text{м}^3$ і кінематичною в'язкістю $\vartheta_m = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Результати розрахунку масштабних коефіцієнтів для побудови моделі наведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати розрахунку масштабних коефіцієнтів

Параметр, що моделюється	Позначення	Звідки отримано	Масштабний коефіцієнт	
			формула	величина
Фізичні властивості	ρ	Фізичні властивості натури і моделі	$m_\rho = \frac{\rho_n}{\rho_m}$	0,44
	ϑ		$m_\vartheta = \frac{\vartheta_n}{\vartheta_m}$	0,69
Лінійний розмір (діаметр трубопроводу)	l	Із: $Ga: \left(\frac{gl^3}{\vartheta^2}\right)_n = \left(\frac{gl^3}{\vartheta^2}\right)_m$	$m_l = m_\vartheta^{2/3}$	0,78
Швидкість течії	V	Із: $Re: \left(\frac{Vl}{\vartheta}\right)_n = \left(\frac{Vl}{\vartheta}\right)_m$	$m_V = m_\vartheta \cdot m_l^{-1}$	0,88
Тиск в трубопроводі	p	Із: $Eu: \left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_n = \left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_m$	$m_p = m_\rho \cdot m_V^2$	0,62

З урахуванням масштабних коефіцієнтів виконується розрахунок параметрів моделі (табл. 2.4), її побудова і проведення для неї необхідного комплексу досліджень.

Таблиця 2.4 – Величини показників моделі

Показник	Позначення	Од. вимір.	Величина
Густина рідини	ρ_m	кг/м ³	800
Кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини	ϑ_m	м ² /с	$0,8 \cdot 10^{-6}$
Лінійний розмір (діаметр			

трубопроводу)	l_m	м	0,12
Швидкість течії рідини в трубопроводі	V_m	м/с	2,64
Тиск в трубопроводі	p_m	МПа	0,12

2.2 Метод аналізу розмірностей

Цей метод можна розглядати як віртуальний аналог фізичного моделювання процесу, але за допомогою засобів розмірностей фізичних величин.

Суть методу полягає в тому, що з параметрів, які характеризують систему, складається вираз-модель, що має потрібну розмірність і певним чином відтворює (емулює, імітує) функціонування фізичної системи. Часто саме складена за правилом розмірності формула і виявляється шуканим співвідношенням (з точністю до безрозмірного множника).

Цей метод не дає повних відомостей про співвідношення між змінними, яке, у кінцевому рахунку, повинно бути виявлене експериментально. Тим не менше цей метод дозволяє значно скоротити обсяг експериментальних робіт.

Таким чином, ефективне застосування методу розмірностей можливе тільки при комбінуванні його з експериментом; при цьому повинні бути відомі усі фактори або змінні величини, які впливають на досліджуваний процес.

Аналіз розмірностей дає логічний розподіл величин по безрозмірних групах. У загальному вигляді функціональна залежність N може бути представлена у вигляді формули, яка називається *формулою розмірності*:

$$\left. \begin{aligned} N &= f(v, L, \rho, \mu, g, p, \dots) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{або} \\ (2.73) \end{array}$$

$$N = f(n_1, n_2, n_3, \dots).$$

Сюди входить $(k+1)$ величин з включенням і величини N . Вони можуть бути змінними, постійними, розмірними і безрозмірними. Однак у даному випадку необхідно, щоб для числових величин, які входять у рівняння, що характеризує фізичне явище, була би прийнята одна й та ж система основних одиниць вимірювання. При дотриманні цієї умови

рівняння залишається справедливим при довільно вибраній системі одиниць вимірювання. Далі, ці основні одиниці повинні бути незалежними за своїми розмірностями, а число їх таким, щоб була можливість представити через них розмірності усіх інших величин, які входять у функціональну залежність (2.73).

Такими одиницями вимірювання можуть бути будь-які три величини, що входять у рівняння (2.73) і є незалежними одна від одної у відношенні розмірності. Якщо прийняти, наприклад, за одиниці вимірювання довжину L і швидкість V , тим самим маємо заданими одиницю довжини L і одиницю часу $T = L/V$. Таким чином, для третьої одиниці вимірювання не можна приймати величину, розмірність якої містить тільки довжину і час, як, наприклад, прискорення, тому що ця величина вже є заданою в результаті вибору одиниці довжини і швидкості. Тому додатково повинна бути вибрана будь-яка величина, в розмірність якої входить маса, наприклад, густина, в'язкість, сила і т.п.

На практиці, наприклад, при гідравлічних дослідженнях, виявляється доцільним прийняти наступні три одиниці вимірювання: швидкість V_0 будь-якої частинки потоку, будь-яку довжину (діаметр трубопроводу D або його довжину L), густину ρ вибраної частинки.

Розмірність цих одиниць вимірювання:

$$[V_0] = \text{м/с}; \quad [L] = \text{м}; \quad [\rho] = \text{кг/м}^3.$$

Таким чином, рівняння для розмірностей у відповідності до функціональної залежності (2.73) може бути представлене у такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} [N] &= [V_0]^x \cdot [L_0]^y \cdot [\rho_0]^z \\ [n_i] &= [V_0]^{x_i} \cdot [L_0]^{y_i} \cdot [\rho_0]^{z_i} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{або} \\ (2.74) \end{array}$$

Значення N_i і n_i , взяті у системі основних одиниць (метр, секунда, кілограм), можна виразити безрозмірними числами:

$$\pi = \frac{N}{V_0^x \cdot L_0^y \cdot \rho_0^z}; \quad \pi_i = \frac{n_i}{V_0^{x_i} \cdot L_0^{y_i} \cdot \rho_0^{z_i}}.$$

Отже, замість рівняння (2.73) можна написати рівняння, у якому всі величини виражені у відносних одиницях (по відношенню до V_0, L_0, ρ_0):

$$\frac{N}{V_0^x \cdot L_0^y \cdot \rho_0^z} = f \left(\frac{n_1}{V_0^{x_1} \cdot L_0^{y_1} \cdot \rho_0^{z_1}}, \frac{n_2}{V_0^{x_2} \cdot L_0^{y_2} \cdot \rho_0^{z_2}}, \frac{n_3}{V_0^{x_3} \cdot L_0^{y_3} \cdot \rho_0^{z_3}} \right). \quad (2.75)$$

Оскільки n_1, n_2, n_3 являють собою, відповідно, V_0, L_0, ρ_0 , то перші три члени рівняння перетворюються в три одиниці і функціональна залежність приймає вигляд:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \dots, \pi_k). \quad (2.76)$$

У відповідності до π -теорема будь-яке співвідношення між розмірними величинами можна сформулювати як співвідношення між безрозмірними величинами. При дослідженнях ця теорема дозволяє визначити зв'язок не між самими змінними, а між деякими безрозмірними їх співвідношеннями, складеними за визначеними законами.

Отже, функціональна залежність між $k + 1$ розмірними величинами N і n_i ($v, L, \rho, \mu, g, \dots$) у загальному випадку виражається як співвідношення між $(k + 1 - 3)$ величинами π і π_i ($i = 4, 5, \dots, k$), кожна з яких є безрозмірна степенева комбінація величин, які входять у функціональну залежність. Безрозмірні числа π носять характер критеріїв подібності, як це видно з наступного прикладу.

Приклад 2.2. Визначити функціональну залежність для сили опору F ($H = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$), яку випробує пластина при обтіканні її рідиною у повздовжньому напрямку.

Функціональну залежність сили опору можна представити у вигляді функції від ряду незалежних змінних і визначити її в критеріях подібності:

$$F = f(V, S, \rho, \mu, g, p, \frac{a}{L}, \beta),$$

де V – швидкість обтікання, м/с; S – площа пластини, м²; ρ – густина рідини, кг/м³; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, Па·с ([Па·с] = кг/м·с); g – прискорення вільного падіння, м/с²; p – тиск, Па (Па = кг/м·с); $\frac{a}{L}$ – відношення висоти пластини до її довжини; β – кут нахилу пластини до напрямку потоку.

Таким чином, величини $\frac{a}{L}$ і β – безрозмірні, інші шість – розмірні, три з них: V , S і ρ прийняті за основні. У відповідності до π -теорему тут можливі тільки три безрозмірних співвідношення, отже:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \frac{a}{L}, \beta),$$

або

$$\frac{F}{V^x S^y \rho^z} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{V^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}}, \frac{g}{V^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}}, \frac{p}{V^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}}, \frac{a}{L}, \beta\right)$$

Враховуючи рівність розмірностей для чисельника і знаменника, знайдемо показники степенів:

– для сили опору:

$$[F] = [V^x S^y \rho^z],$$

або

$$\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = (\text{м} / \text{с})^x (\text{м}^2)^y (\text{кг} / \text{м}^3)^z,$$

звідки

$1 = z$ (показники зліва і справа при кг);

$-2 = -x$ (показники зліва і справа при с);

$1 = x + 2y - 3z$ (показники зліва і справа при м).

Рішення цих рівнянь дає: $x = 2$; $y = 1$; $z = 1$.

Функціональна залежність:

$$\pi = \frac{F}{V^2 S \rho}.$$

Аналогічно одержимо:

– для в'язкості:

$$[\mu] = [V^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}]$$

маємо $x_1 = 1$; $y_1 = 0,5$; $z_1 = 1$.

Функціональна залежність:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{V \rho \sqrt{S}} ;$$

– для прискорення вільного падіння:

$$[g] = [V^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}]$$

маємо $x_2 = 2$; $y_2 = -0,5$; $z_2 = 0$.

Функціональна залежність:

$$\pi_5 = \frac{g \sqrt{S}}{V^2} ;$$

– для тиску:

$$[p] = [V^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}]$$

маємо $x_3 = 2$; $y_3 = 0$; $z_3 = 1$.

Функціональна залежність:

$$\pi_6 = \frac{p}{V^2 \rho} .$$

Очевидно, що $\pi_4 = Re$, $\pi_5 = Fr$, $\pi_6 = Eu$. Тоді шукана функціональна залежність має вигляд:

$$\frac{F}{V^2 S \rho} = f(Re, Fr, Eu, \frac{a}{L}, \beta).$$

Звідси можна зробити висновок, що після дослідження даного процесу при деяких розмірах, швидкостях і т.п., можна встановити як він буде протікати при інших розмірах і швидкостях у тому випадку, якщо безрозмірні відношення, складені з цих змінних, для обох випадків будуть

однакові. Отже, висновки, отримані при експериментах з тілами даних розмірів, що рухаються з даною швидкістю і т.п., будуть, очевидно, справедливі і для будь-яких інших розмірів тіла, швидкості і т.д. за умови рівності безрозмірних відношень π з тими, що спостерігалися при експериментах.

Приклад 2.3. На основі попередніх досліджень на лабораторному пристрої визначити функціональну залежність потужності N ($\text{Вт} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$) електродвигуна мішалки, яка необхідна для перемішування пульпи з реагентами у контактному чані.

Для подібності двох змішувальних систем потрібно:

- геометрична і гранична подібність, при якій відношення величин для систем, що розглядаються повинні бути рівні між собою;
- кінематична подібність, де швидкості у відповідних точках повинні бути у такому ж відношенні, як і швидкості у інших відповідних точках, тобто шляхи руху пульпи повинні бути подібними;
- динамічна подібність, яка вимагає, щоб відношення сил у відповідних точках було б рівним відношенню сил в інших відповідних точках.

Якщо граничні умови фіксовані, можна подати одну змінну величину через інші змінні, тобто функціональну залежність потужності електродвигуна мішалки можна представити у вигляді функції від ряду незалежних змінних величин і визначити її в критеріях подібності:

$$N = f(D, \rho, \omega, \mu, g),$$

де D – діаметр мішалки, м; ρ – густина пульпи, $\text{кг}/\text{м}^3$; ω – швидкість обертання мішалки, с^{-1} ; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, $\text{Па} \cdot \text{с}$ ($\text{Па} \cdot \text{с} = \text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}$); g – прискорення вільного падіння, $\text{м}/\text{с}^2$ кут нахилу пластини до напрямку потоку.

Таким чином, маємо п'ять розмірних величин, три з них: D , ρ і ω прийняті за основні. У відповідності до π -теорема тут можливі тільки два безрозмірних співвідношення, отже:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5),$$

або

$$\frac{N}{D^x \rho^y \omega^z} = f\left(1,1,1, \frac{\mu}{D^{x_1} \rho^{y_1} \omega^{z_1}}, \frac{g}{D^{x_2} \rho^{y_2} \omega^{z_2}}\right).$$

Враховуючи рівність розмірностей для чисельника і знаменника, знайдемо показники степені:

– для потужності електродвигуна мішалки :

$$[N] = [D^x \rho^y \omega^z]$$

або

$$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^3 = (\text{м})^x (\text{кг} / \text{м}^3)^y (1/\text{с})^z,$$

звідки

$3 = z$ (показники зліва і справа при с);

$1 = y$ (показники зліва і справа при кг);

$2 = x - 3y$ (показники зліва і справа при м).

Рішення цих рівнянь дає: $x = 5$; $y = 1$; $z = 3$.

Функціональна залежність:

$$\pi = \frac{N}{D^5 \rho \omega^3}.$$

Аналогічно одержимо:

– для в'язкості:

$$[\mu] = [D^{x_1} \rho^{y_1} \omega^{z_1}]$$

маємо $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $z_1 = 1$.

Функціональна залежність:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{D^2 \rho \omega};$$

– для прискорення вільного падіння:

$$[g] = [D^{x_2} \rho^{y_2} \omega^{z_2}]$$

маємо $x_2 = 1$; $y_2 = 0$; $z_2 = 1$.

Функціональна залежність:

$$\pi_5 = \frac{g}{D\omega^2}.$$

Очевидно, що $\pi_4 = D^2 \cdot \text{Re}$, $\pi_5 = \text{Fr}$. Тоді шукана функціональна залежність має вигляд:

$$\frac{N}{D^5 \rho \omega} = f(D^2 \text{Re}, \text{Fr}).$$

Звідси можна зробити висновок, що після знаходження функціональної залежності потужності електродвигуна мішалки при деяких її параметрах, можна встановити якою вона буде й при інших розмірах і швидкостях і т.п. у тому випадку, якщо безрозмірні відношення для обох випадків будуть однакові. Отже, висновки, отримані на експериментальному пристрої будуть справедливими і для будь-яких інших при умові рівності безрозмірних відношень π з тими, що спостерігалися при експериментах.

2.3 Моделювання на основі методу аналогій

2.3.1 Методи аналогій

Якщо два або декілька явищ, різних за своєю фізичною природою, можуть бути описані одним й тим же диференціальним рівнянням із збереженням граничних умов, то ці явища називають аналогічними. Метод аналогій розширює можливості вивчення явищ і уже давно одержав широке розповсюдження [9, 13].

М.Є. Жуковський ще в 1900 р. у своїй доповіді на засіданні Московського математичного товариства говорив, що «встановлення математичної аналогії між двома явищами приносить подвійну користь. Ми можемо на основі знайденої аналогії усі вирішені задачі з однієї галузі фізичних явищ перетворити у відповідні задачі іншої і отримати, таким чином, їхнє рішення. З іншого боку, якщо одне з двох математично аналогічних явищ складне і важко спостережуване, а інше може бути здійснене на простому приладі, який дозволяє виміряти параметри, що характеризують явища, то експериментальне вивчення другого явища

може розширити наше знайомство з першим, на дивлячись на те, що явища можуть представляти нерозв'язну математичну задачу».

Сьогодні у багатьох галузях технічної механіки взагалі і в механіці рідин та газів зокрема успішно використовуються електричні, газогідравлічні, акустичні, магнітні, теплові та інші аналогії. В гідродинаміці застосовують такі аналогії: електрогідродинамічна (ЕГДА), газогідравлічна (ГАГА), гідромагнітна (МАГА), мембранна, ламінарна, теплова і дифузійна.

Перші п'ять аналогій належать до аналогій безвихрового руху ідеальної нестисливої рідини, потенціал швидкості і функція течії якого задовольняють рівнянню Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.77)$$

Граничні умови для тіла яке обтікається потенціальним потоком ідеальної рідини будуть:

– на поверхні тіла внаслідок непроникності твердої стінки нормальна складова швидкості дорівнює нулю, тобто:

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0; \quad (2.78)$$

– на нескінченності при плоскопаралельному потоці, направленому вздовж осі x :

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_1 \quad \text{і} \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.79)$$

Електрогідродинамічна аналогія (ЕГДА) базується на тому, що електричний потенціал φ_e і функція течії ψ_e задовольняють рівнянню Лапласа (2.77).

Граничні умови в електричному полі залежать від того, чи є тіло провідником, чи діелектриком. Якщо тіло, яке знаходиться у електричному полі, діелектрик, то граничні умови будуть:

– на поверхні тіла:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial s} = 0; \quad (2.80)$$

– на нескінченності:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = q_1 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = 0, \quad (2.81)$$

де q_1 – напруженість електричного поля на нескінченності.

Якщо модель виготовлена з електропровідного матеріалу, то граничні умови будуть:

– на поверхні тіла:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial s} = 0; \quad (2.82)$$

– на нескінченності:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = q_1. \quad (2.83)$$

Порівнюючи наведені граничні умови, можна легко бачити, що для здійснення аналогії повинні дотримуватися такі відповідності:

– якщо у електричному полі помістити тіло з непровідного матеріалу, то гідродинамічним величинам – потенціалу швидкості, функції течії і швидкості на нескінченності – відповідають електричний потенціал, функція течії і напруженість електричного поля на нескінченності. Будемо називати цю аналогію аналогією A . Очевидно, що при аналогії A лінії течії електричного і гідродинамічного полів збігаються, а вектори електричного струму мають той же напрямок, що й вектори швидкості;

– якщо тіло провідник, то потенціалу швидкостей і функції течії у гідродинамічному полі відповідає потенціал і функція течії у електричному полі. Відповідність швидкості і напруженості електричного поля на нескінченості залишається таким самим, як і у попередньому випадку. Будемо називати цю аналогію аналогією *Б*. При дотриманні її вектори електричного струму і швидкості в усьому полі ортогональні.

Однорідне електричне поле, у якому вивчається обтікання профілю, може бути створене в рідкому електроліті, налитому у ванну, за допомогою електропровідного паперу, фольги, тонкого шару електропровідної фарби та ін. В практиці частіше за все використовуються ванни, заповнені чистою водопровідною водою, розчинами мідного купоросу, сірчаної і соляної кислоти. Концентрація розчинів повинна бути дуже малою (0,002 – 0,005 %), тому що в протилежному випадку відбуваються електрохімічні процеси і склад електроліту змінюється.

На рис. 2.6 наведені схеми електролітичних ванн для моделей, виготовлених з провідних (рис. 2.6 *а*) і непровідних (рис. 2.6 *б*) матеріалів.

При вивченні потоків в патрубках, колінах, дифузорах та інших елементах машин форма ванни визначається формою досліджуваного елемента.

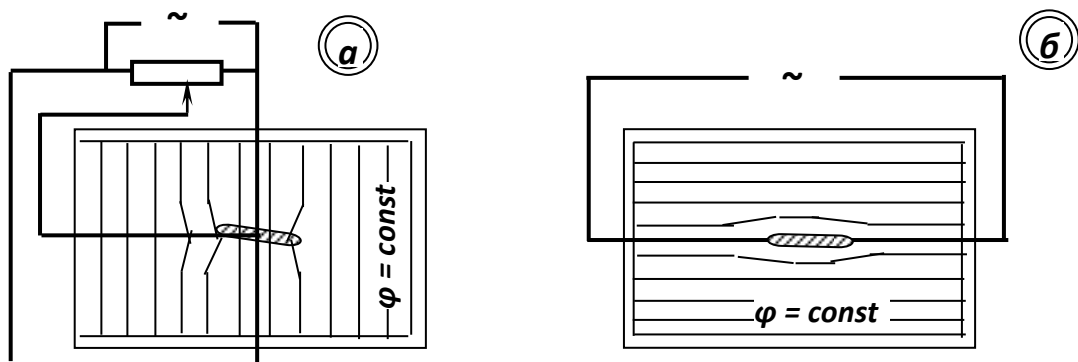


Рисунок 2.6 – Схеми електролітичних ванн для моделей з провідних (*а*) і непровідних (*б*) матеріалів.

Гідромагнітна аналогія (МАГА) оснований на тому, що скалярний потенціал магнітного поля φ_m задовольняє при постійному значенні магнітної проникності рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0. \quad (2.84)$$

Оскільки компоненти напруженості магнітного поля дорівнюють:

$$H_x = -\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x}; \quad H_y = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y}, \quad (2.85)$$

то, відповідно, при виконанні однакових граничних умов магнітному потенціалу буде відповідати гідродинамічний потенціал, а проекціям швидкості в потоці будуть відповідати проекції вектора напруженості магнітного поля.

Ця аналогія через складності вимірювань параметрів магнітного поля поки що не отримала широкого розповсюдження.

Мембранна аналогія оснований на тому, що прогин ненавантаженої мембрани z задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (2.86)$$

тобто прогин відповідає гідродинамічній функції ψ . Тоді швидкість плоского потоку нестисливої рідини можна визначити через прогин у вигляді:

$$v_x = -\frac{\partial z}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (2.87)$$

і

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.88)$$

Рівняння навантаженої мембрани є рівнянням Пуассона і має вигляд:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{\tau}, \quad (2.89)$$

де p – залишковий тиск на мембрану; τ – натяг мембрани.

Останнє рівняння має у гідродинаміці своїм аналогом рівняння функції течії плоского вихрового потоку ідеальної нестисливої рідини в обертовій системі координат:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\varpi, \quad (2.90)$$

де ϖ — кутова швидкість обертання системи координат.

При використанні мембранної аналогії частіше за все застосовують мильні, білкові й гумові плівки. Апаратура і методика мембранної аналогії добре розроблені.

Ламінарна аналогія оснований на тому, що для ламінарного руху в'язкої рідини між двома близько розташованими пластинками існує потенціал середніх швидкостей. Відповідно, якщо між пластинами помістити будь-яке тіло, то спектр обтікання його буде відповідати обтіканню цього тіла ідеальною рідиною.

Ламінарна аналогія у порівнянні з розглянутими має ту перевагу, що вона дає візуалізацію ліній течії, в тому числі й для нестационарних процесів. Її недолік — менша точність вимірювань і деяке відхилення за рахунок адгезії (прилипання) рідини до обтічних тіл.

2.3.2. Моделювання плоских потоків на основі електрогідродинамічної аналогії (ЕГДА)

Математичним аналогом поля швидкості у потоці ідеальної рідини може служити як стаціонарне електричне поле в потоці однорідного провідного середовища (аналогія v, E), так і органічно зв'язане з ним поле густини струму (аналогія v, j). Оскільки звичайно на електричних моделях безпосередньо вимірюють величини E і φ (а не величини j і φ_j), то слід скористатися аналогією v, E , однак аналогія v, j є більш повною [13]. Дійсно, на поверхні провідника, по якому протікає струм, дотична складова вектора E залишається безперервною і тут розподілені тільки джерела електричного поля, у той час як на межі рухомої рідини безперервна нормальна складова її швидкості і тут розподілені вихори вектора. Таким чином, реальним поверхневим вихорам вектора v на межі потоку відповідають лише фіктивні вихори вектора E другого роду на поверхні обтічного струмом провідника. Між тим поле густини струму повністю локалізоване всередині провідника, на поверхні якого існують

реальні вихори вектора j , аналогічні вихорам вектора v . Величини, які порівнюються в аналогії v, j , наведені в таблиці 2.7.

При побудові моделі використовують алюмінієву фольгу або провідний папір, у вигляді прямокутного аркуша з рамкою із мідного дроту діаметром:

$$d \approx 1,1\sqrt{\rho a / R}, \quad (2.91)$$

де ρ – питомий опір дроту; R – питомий поверхневий опір провідного аркуша; a – діаметр робочої зони у середній частині аркуша.

Таблиця 2.7 – Величини, які порівнюються в аналогії v, j

Поле швидкості в ідеальній рідині	Поле густини струму в однорідному провідному середовищі
1. Швидкість течії рідини v	Густина струму j або лінійна густина струму i $j = \frac{1}{\rho} E; \quad i = \frac{1}{R} E,$ де ρ – питомий опір середовища; R – питомий поверхневий опір провідного шару.
2. Потенціал швидкості V .	Потенціал вектора j або потенціал вектора i $\varphi_j = \frac{1}{\rho} \varphi; \quad \varphi_i = \frac{1}{R} \varphi.$
3. Співвідношення між швидкістю і її потенціалом $v = -grad V$	Співвідношення між густиною струму і її потенціалом $j = -grad \varphi_j; \quad i = -grad \varphi_i.$
4. $\Delta V = 0$	$\Delta \varphi_j = 0; \quad \Delta \varphi_i = 0.$

Рамка міцно притискається до аркуша болтами, при цьому її присутність не буде заважати створенню в аркуші подовжнього або поперечного зовнішнього однорідного поля. Для цього лише необхідно включити відповідні сторони рамки у ланцюг паралельно провідному аркушу і досягти в них такого ж розподілення потенціалу, яке встановлюється на аркуші без рамки. При цьому живлення аркуша здійснюється за допомогою рівномірно розподілених електродів, включених через достатньо великий опір (рис. 2.7).

У подовжньому режимі роботи відношення довжини підвідних дротів до довжини сторін рамки bc і da повинно дорівнювати відношенню сумарного опору живильних каналів до опору провідного аркуша.

Відповідно у поперечному режимі відношення довжини підвідних дротів до довжини сторін рамки ab і cd повинно дорівнювати відношенню сумарного опору «поперечних» каналів до опору моделі при цьому способі включення її у ланцюг.

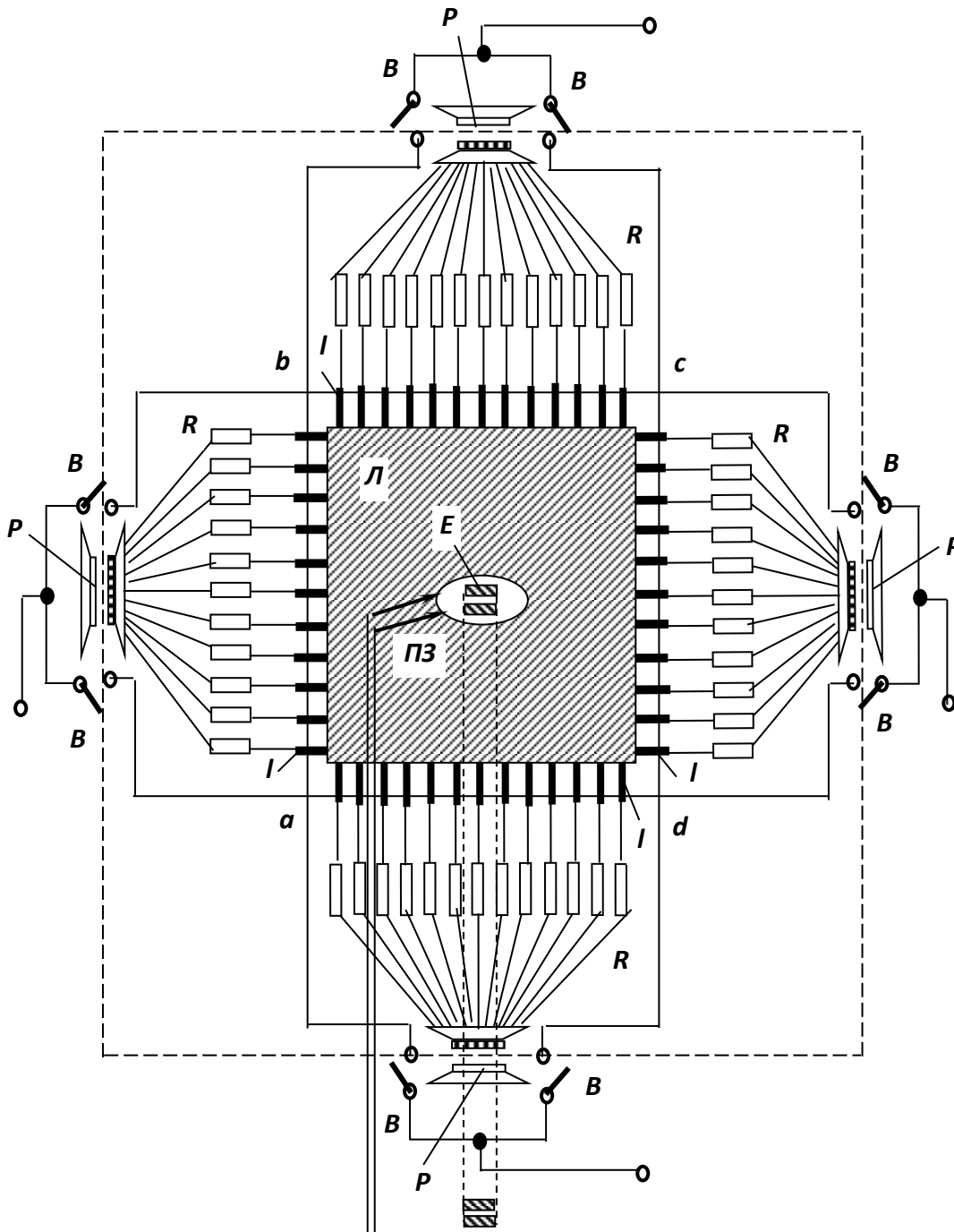


Рисунок 2.7 – Принципова схема пристрою для накладення зовнішнього однорідного електричного поля і вихрового електричного поля торіодальних електромагнітів із застосуванням аркушів фольги (*Л*) розміром 200x50 см і товщиною 12 мк;
abcd - рамка спаяна з мідного дроту діаметром 2,25 мм; *l* - латунні електроди, встановлені з кроком 2 см; *R*- опір каналів; *B* - вимикачі; *P* - перемикачі режиму роботи; *ПЗ* - подвійний зонд; *Е* - торіодальний електромагніт.

Розглянемо область двовірного електричного поля обмежену зовнішнім контуром $abcd$ і внутрішнім контуром L (рис. 2.8), на яких виконуються граничні умови:

$$\varphi_{ab} = \varphi_1; \quad \varphi_{cd} = \varphi_2; \quad (2.92)$$

$$\psi_{da} = \psi_2; \quad \psi_{cd} = \psi_2; \quad (2.93)$$

$$E_n|_L = 0; \quad (2.94)$$

$$\oint_L E_l dl = 0, \quad (2.95)$$

при цьому усередині області мають місце рівності:

$$\operatorname{div} E = 0; \quad (2.96)$$

$$\operatorname{rot}_n E = 0, \quad (2.97)$$

де n – нормаль до площини вектора E .

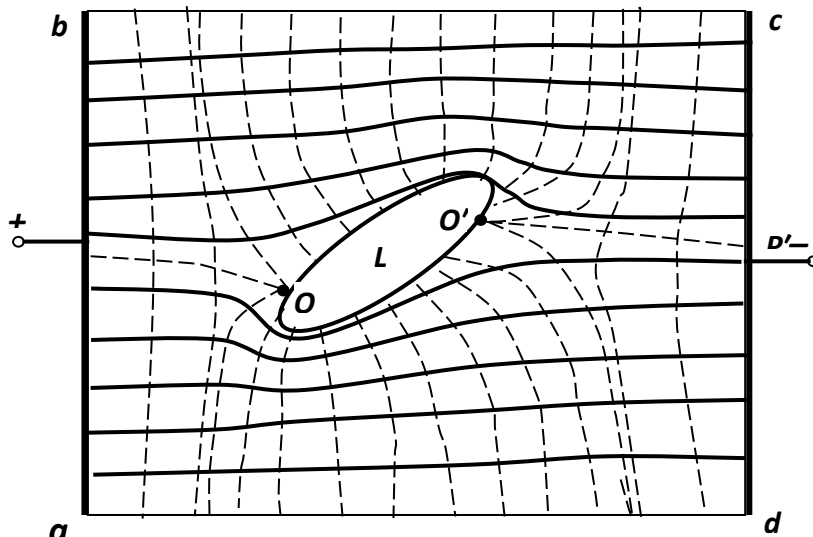


Рисунок 2.8 – Пряма модель, на зовнішньому контурі якої ($abcd$) виконуються

Для того щоб відтворити це поле на прямій моделі, потрібно на листі провідного паперу заклеїти область обмежену профілем L . Підготовлений до роботи пристрій підключається до вторинної обмотки знижувального трансформатора. Лінійна густина струму повинна бути порядку 1 А/см. Накривши фольгу папером на ній олівцем проводять з постійним інтервалом силові лінії. Після побудови на прямій моделі ізопотенціальних ліній з потенціалом φ_L , знаходять особливі точки поля O і O' , які розділяють контур на дві частини; в одну з них струм входить, з іншої виходить. Вимірюють розподіл потенціалу вздовж контуру L з урахуванням співвідношення:

$$\psi^* = -\varphi; \quad \varphi^* = \psi. \quad (2.98)$$

На ділянці olo' відбувається падіння функції ψ , а на ділянці $o'lo$ – її збільшення до попереднього значення. При цьому у точках O і O' функція ψ приймає відповідно максимальне і мінімальне значення, які дозволяють знайти відношення сили струму, що протікає через контур L на прямій моделі $I_{oo'}$ до спільного струму в ній I :

$$\frac{I_{oo'}}{I} = \frac{\varphi_o^* - \varphi_{o'}^*}{\varphi_o^* - \varphi_b^*} = \frac{\varphi_o^* - \varphi_{o'}^*}{U^*}. \quad (2.99)$$

Таким чином, описаний пристрій дає можливість імітувати поле швидкості і обтікання тіла будь-якого профілю у необмеженому рідкому середовищі (напр., частинки в робочому каналі збагачувальної машини).

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ

3.1 Статистичні методи оцінки експериментальних даних

Одержання статистичних математичних моделей передбачає необхідність використання методів математичної статистики при дослідженнях мінеральної сировини, створенні систем автоматичного управління технологічними процесами, прогнозуванні результатів переробки корисних копалин.

Статистичні методи дозволяють визначити рівняння зв'язку вхідних і вихідних параметрів, аналізувати параметри технологічного процесу, побудувати математичну модель процесу, або, іншими словами, установити взаємну залежність між різними факторами і технологічними результатами процесу.

Статистичне дослідження промислового процесу включає:

- визначення законів розподілу параметрів процесу для виявлення можливості застосування тих або інших статистичних методів обробки результатів;
- визначення тісноти і форми зв'язку між окремими параметрами процесу;
- рейтингування вхідних величин за ступенем їх впливу на процес (функцію відгуку) ;
- отримання статистичної моделі процесу у вигляді регресійного рівняння і оцінка його адекватності;
- визначення динамічних характеристик процесу.

3.1.1 Постановка задачі

Збільшення споживання промисловістю металів, вугілля та інших корисних копалин ставить задачі пошуку і освоєння нових видів мінеральної сировини (в тому числі важкозбагачуваних руд), розробки нових ефективних технологій збагачення корисних копалин і вдосконалення, оптимізації існуючих. Складність технологічного процесу збагачення, недостатній рівень розвитку теорії і необхідність урахування великої кількості факторів не дозволяють систематизувати різноманітну інформацію про збагачуваність різних типів корисних копалин і

запропонувати спосіб апіорної оцінки збагачуваності на основі мінералогопетрографічного опису. Як правило, існує декілька прийнятних режимів збагачення, серед яких важко вибрати оптимальний [8, 14, 15].

Необхідність постановки великої кількості експериментів, множина методик досліджень, погана відтворюваність експериментів і суттєвий вплив на їхні результати великої кількості параметрів, що інколи не реєструються, вносить елемент випадковості у результати оцінки результатів процесів переробки корисних копалин. Досвід і кваліфікація дослідника, набір використаних апаратури і реагентів, термін досліджень можуть вплинути на оцінку вихідної сировини і вибір технологічної схеми переробки корисної копалини.

Головними задачами при дослідженні корисних копалин на збагачуваність є:

- дослідження властивостей сировини,
- розробка схеми збагачення з урахуванням комплексного використання сировини,
- відпрацювання технологічної режимної карти процесів,
- удосконалення технологічної схеми на діючій фабриці,
- випробовування розроблених режимів на діючій фабриці,
- випробовування нових реагентів,
- з'ясування механізмів дії і ступеня впливу основних факторів на результати збагачення і роботу машин,
- одержання вихідних даних для техніко-економічного обґрунтування будівництва нової фабрики (цеху) або модернізації діючої для збагачення досліджуваної сировини.

З усіх методів оцінки збагачуваності, що застосовуються у теоретичних, технологічних і проектних дослідженнях, експеримент вважається найбільш достовірним і розповсюдженим. Але навіть прямий лабораторний метод визначення збагачуваності дає можливість встановити тільки якісну оцінку впливу різних параметрів на технологічні показники, тому що досліди, як правило, мають погану відтворюваність. Аналогічні труднощі виникають у дослідженнях на напівпромислових установках і фабриках. Тут також немає стандартної методики порівняння різних режимів і оцінки надійності отриманих результатів, а суб'єктивні фактори і оцінки, хоча й меншою мірою, відіграють суттєву роль. Крім того, на результати досліджень суттєво впливають різні неконтрольовані чинники,

що важко піддаються урахуванню (напр., знос обладнання, дрібні аварії, ненадійність усереднення проб, точність хімічних аналізів і т.д.).

Послідовність статистичного дослідження процесів збагачення корисних копалин може бути сформульована наступним чином:

- постановка мети дослідження, вибір параметрів оптимізації процесу, аналіз їхнього взаємозв'язку і областей застосування тих або інших параметрів;
- вибір методики експериментів, аналіз відтворювання й оцінка кількості паралельних вимірів для одержання результатів з необхідною вірогідністю;
- виділення факторів, що впливають на досліджуваний процес;
- складання плану експериментів, його реалізація й одержання статистичної моделі процесу і раціональних режимів його ведення;
- одержання кінетичної або динамічної моделі процесу (при необхідності).

3.1.2 Статистична оцінка результатів досліджень

3.1.2.1 Оцінка похибок вимірювань

Відтворюваність лабораторних дослідів має велике значення при дослідженнях, теоретичному вивченні технологічних процесів та їх моделюванні. У відповідності до теорії похибок розрізняють:

- *грубі похибки (промахи)* – результати, що різко відрізняються від інших вимірювань і є наслідком порушення умов вимірювання;
- *систематичні похибки*, що зв'язані з дефектом приладу або методу; їхня величина однакова при усіх вимірюваннях. До одного виду систематичних похибок відносяться похибки, природа яких відома і величину яких можна визначити (поправки), до другого – похибки, що виявляються тільки іншими методами вимірювання тієї ж величини;
- *випадкові похибки*, які залежать від множини факторів, що не контролюються. Випадкові похибки врахувати неможливо, їхню величину можна визначити тільки повторними вимірюваннями і статистичною обробкою результатів. Величина випадкової похибки характеризує відтворюваність вимірювання [8].

У відповідності до теорії імовірності випадкові похибки підпорядковуються нормальному закону розподілу (закону Гауса), за яким імовірність похибки:

$$P(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.1)$$

де σ^2 – дисперсія розподілу; σ – середнє квадратичне відхилення.

Імовірність відхилення від середнього значення показана на рис. 3.1.

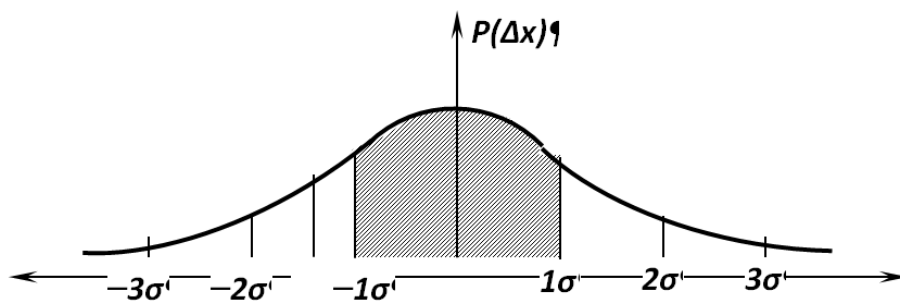


Рисунок 3.1 – Імовірність відхилення від середнього значення на величину σ (заштрихована площа).

Оскільки істинне значення вимірюваної величини μ і дисперсія σ^2 невідомі, використовують їхні статистичні оцінки \bar{x} і S^2 . Для ряду випадкової величини $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ $\Delta x = \mu - x_i$.

Середнє арифметичне \bar{x} для n значень величини x_i :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.2)$$

При обробці дуже великого матеріалу розрахунки можна спростити, якщо n спостережених значень x_1, x_2, \dots, x_n згрупувати у m інтервалів з середніми t_1, t_2, \dots, t_m при одній довжині інтервалу Δt . Якщо кожному з цих інтервалів відповідають частоти спостережень v_1, v_2, \dots, v_m , то середнє визначається виразом:

$$\bar{x} \approx \bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^m t_j \nu_j}{\sum_{j=1}^m \nu_j} . \quad (3.3)$$

Різниця між \bar{x} і \bar{t} буде невеликою, якщо число спостережень велике, а інтервали групувань малі. Кожну з частот (ν_1 , ν_2 і т.д.) можна назвати вагою відповідного значення, а \bar{x} буде середньозваженим значенням.

Вибіркова дисперсія (математичне сподівання):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} , \quad (3.4)$$

де S – середня квадратична похибка (стандартне відхилення).

Відносна квадратична похибка виражена у відсотках від випадкової величини, називається коефіцієнтом варіації:

$$V_x = 100 S_x / \bar{x} , \% . \quad (3.5)$$

Імовірність того, що результат вимірювань відрізняється від істинного значення на величину не більшу ніж Δx ,

$$P(\bar{x} - \Delta x < X < \bar{x} + \Delta x) = A \quad (3.6)$$

називається довірчим інтервалом або коефіцієнтом надійності.

Інтервал значень від $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ називається довірчим інтервалом, тобто з імовірністю, рівною A , результат не виходить за межі довірчого інтервалу від $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$. Чим більший довірчий інтервал задається, тим імовірніше, що результати вимірювань не вийдуть за його межі. Таким чином, для характеристики величини випадкової похибки необхідно задати два числа: величину похибки (або довірчого інтервалу) і величину довірчої імовірності.

За законом Гауса середній квадратичній похибці σ відповідає довірча імовірність 0,68, подвоєній середній квадратичній похибці 2σ – довірча імовірність 0,95, потроєній середній квадратичній похибці 3σ – довірча імовірність 0,997. При технічних дослідженнях, як правило, приймають довірчий інтервал при довірчій імовірності $P = 0,95$.

За законом випадкових похибок, якщо величина z , що вимірюється, є сумою або різницею двох випадкових величин X і Y , то:

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2 \quad \text{або} \quad S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}. \quad (3.7)$$

Закон складання дисперсій зберігається для будь-якого числа доданків, звідки витікає, що середня квадратична похибка середнього арифметичного:

$$S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n}. \quad (3.8)$$

Довірчий інтервал визначається за допомогою t -розподілу Ст'юдента (додаток А), що залежить від довірчої імовірності P і числа ступенів свободи $f = n - 1$:

$$\Delta x = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}. \quad (3.9)$$

Величина t_p дуже сильно залежить від f при малих її значеннях ($n < 30$), при великих значеннях n ($n > 30$) ця залежність значно менше. З формули (3.9) при $\Delta x = \delta$ випливає:

$$n \geq \frac{t_p^2 S_x^2}{\delta^2}. \quad (3.10)$$

Статистичні оцінки випадкової величини (середнє арифметичне \bar{x} і стандартне відхилення S_x) розраховуються з припущення, що вибірка x_i не містить грубих похибок (промахів). Для виключення промахів з великої вибірки можна користуватися правилом 2σ або 3σ . Для промаху x^* розраховується абсолютне значення різниці $|x^* - \bar{x}|$. При довірчій імовірності $P = 0,95$ x^* відкидається, якщо $|x^* - \bar{x}| > 2\sigma$, а при $P = 0,997$, якщо $|x^* - \bar{x}| > 3\sigma$.

Для невеликих вибірок, коли S_x суттєво відрізняється від σ користуються критерієм Ст'юдента, при цьому порівнюють

$$t = \frac{|x^* - \bar{x}|}{S_x} \quad (3.11)$$

з табличним значенням t_p (додаток А). Якщо $t > t_p$, то з довірчою імовірністю P можна вважати, що вимірювання x^* є груба похибка, але й при $t \leq t_p$ не можна говорити про відсутність грубої похибки, а можна тільки говорити про недостатні підстави для виключення даного вимірювання. Після виключення грубої похибки оцінки \bar{X} і S_x необхідно знов перерахувати та розглянути питання про промахи у вибірці, що залишилась.

3.1.2.2 Статистичні критерії розходження

В ході досліджень, особливо промислових, накопичується значний обсяг експериментального матеріалу у вигляді показників збагачення, характеристик корисної копалини і т.д., які відповідають однаковим або різним технологічним режимам, конструкціям апаратів і типам корисних копалин. При цьому виникають наступні запитання:

- чи однорідні показники збагачення, що отримані при різних режимах або конструкціях апаратів, чи ці вибірки відносяться до різних статистичних сукупностей;
- чи однаково стабільні результати, що отримані при різних режимах, чи у якомусь випадку показники менш стабільні і розкид даних більше;
- чи відноситься та або інша проба корисної копалини або результат до даної статистичної сукупності;
- чи відповідає даний емпіричний розподіл тому або іншому теоретичному розподілу;
- чи адекватна вибрана математична модель експериментальним даним.

Ці запитання вирішуються перевіркою статистичної гіпотези про приналежність усіх отриманих даних до однієї генеральної сукупності. Загальний підхід полягає у перевірці нульовій гіпотези H_0 про відсутність реального розходження між експериментальними результатами, розкид

яких пояснюється випадковими факторами, що обумовлюють помилку відтворюваності [6, 8].

Нульовою гіпотезою (H_0) називається висунута гіпотеза, відхилення від якої вважаються випадковими, протилежна їй гіпотеза (H_1) – альтернативною або конкуруючою.

Критерій перевірки гіпотези дозволяє виявити за результатами дослідів вірна чи невірна дана гіпотеза. Критерій складається на основі статистики $Q_n = Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, розподіл якої відомий (нормальний, t , F або χ^2). Критерій поділяє множину можливих значень статистики на область прийняття гіпотези та область її неприйняття (критичну). У випадку попадання статистики критерію у область неприйняття гіпотези H_0 вона відкидається. Можливі такі випадки:

- гіпотеза H_0 вірна і приймається у відповідності з критерієм;
- гіпотеза H_0 невірна і відкидається у відповідності з критерієм;
- гіпотеза H_0 вірна, але її відкидають у відповідності з критерієм (*похибка першого роду*);
- гіпотеза H_0 невірна, але її приймають (*похибка другого роду*).

Справедливість нульової гіпотези перевіряється розрахунком імовірності того, що внаслідок випадковості вибірки розходження може досягнути фактично спостережної величини; якщо ця імовірність виявиться дуже малою, то нульова гіпотеза відкидається (тобто малоймовірно, що розходження спричиняється випадковими величинами, а не реальним розходженням). Імовірність P , яку приймають за основу при статистичній гіпотезі, визначає рівень значимості.

За результатами, що одержані для двох вибірок, розраховують значення деякої контрольної величини λ і визначають область A , в середині якої слід очікувати λ з визначеною імовірністю P . Якщо контрольна величина λ лежить поза областю A , то вибрана гіпотеза відкидається, розходження між одержаними величинами вважається статистично значимим. Якщо контрольна величина λ лежить в області A , то вибрана гіпотеза приймається. Відкинути або прийняти статистичну гіпотезу вирішують на основі вибірових вимірювань, тому слід оцінити можливість похибки. Якщо, наприклад, з імовірністю P відкидають гіпотезу про те, що два середніх значення x_1 і x_2 належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності, то з цього можна зробити висновок про розходження цих значень. Імовірність того, що обоє середніх значення належать однієї і тієї ж генеральної сукупності, буде $\alpha = 1 - P$.

Як правило, задають імовірність похибки першого роду α , яку називають *рівнем значимості*, похибка другого роду визначається імовірністю $1 - \beta$, де β – імовірність того, що похибка не буде допущена, це – *міцність критерію*. Рівень значимості α приймають рівним 0,05; 0,1; 0,01 або 0,005. Вибір довірчої імовірності P визначається конкретними задачами дослідження. При цьому слід ураховувати, що зі зменшенням α зростає імовірність похибки другого роду.

При прийнятті або відкиданні гіпотези використовують три правила:

- гіпотеза, що перевіряється, відкидається, якщо похибка першого роду може проявитися у менше ніж $100\alpha = 1\%$ усіх випадків, тобто $P \geq 0,99$. Тоді розглянута різниця є значимою;

- гіпотеза, що перевіряється, приймається, якщо похибка першого роду може проявитися у більше ніж $100\alpha = 5\%$ усіх випадків, тобто $P \leq 0,95$. Тоді розглянута різниця є незначимою;

- гіпотезу, що відкидається, слід додатково обговорити, якщо число можливих похибок першого роду лежить в інтервалі між 5 і 1% ($0,95 < P < 0,99$). Необхідно провести додаткові дослідження.

Суть похибок першого і другого роду можна пояснити таким прикладом. Нехай нульова гіпотеза H_0 означає, що вміст корисного компонента у концентраті задовольняє вимогам споживача (умови постачання). Якщо поставка концентрату відхиляється, хоча H_0 вірна, то ризикує виробник – похибка першого роду. Якщо поставка концентрату приймається, хоча H_0 невірна, то ризикує споживач – похибка другого роду.

Таким чином, гіпотеза або приймається, або відкидається. Прийняття гіпотези не означає того, що вона є єдино правильною. Прийнята статистична гіпотеза – це вірогідне твердження, що не суперечить досліду.

3.1.2.3 Критерій Ст'юдента (t-критерій)

Порівняння середніх значень

При порівнянні середніх значень сумісно розглядають довірчі інтервали двох статистичних сукупностей. Для оцінки довірчого інтервалу використовують t -критерій [2, 6, 8].

Нехай є дві статистичні вибірки: x – з параметрами \bar{x} і S_x , що одержані при n_x вимірювань і y – з параметрами \bar{y} і S_y при n_y вимірювань. Розподіли x і y близькі до нормального. Нульова гіпотеза полягає у припущенні, що математичні очікування μ_x і μ_y рівні, тобто $\mu_x - \mu_y = 0$.

Якщо дисперсії S_x^2 і S_y^2 розрізняються незначно, розраховують середньозважене двох дисперсій і параметр t :

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}; \quad (3.12)$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}}. \quad (3.13)$$

Число ступенів свободи:

$$f = n_x + n_y - 2. \quad (3.14)$$

Якщо $t \succ t_{95\%}$, розходження між \bar{x} і \bar{y} незначиме.

Порівняння сполучених пар

Роботу двох апаратів або два технологічних режими часто доводиться порівнювати в різних умовах, наприклад при зміні якості корисної копалини, температури пульпи і т.п. Попарне порівняння дозволяє виключити варіацію, що пов'язана з впливом інших факторів.

При цьому оцінюється не розходження середніх $\bar{x} - \bar{y}$, а різницю пар спостережень $\Delta_i = x_i - y_i$. Варіаційний ряд Δ розглядається як самостійний з середнім $\bar{\Delta}$, дисперсією S_{Δ}^2 і числом ступенів свободи $f = n - 1$, де n – число сполучених пар спостережень. Тоді розраховують дисперсію і критерій Ст'юдента:

$$S_{\Delta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)}; \quad (3.15)$$

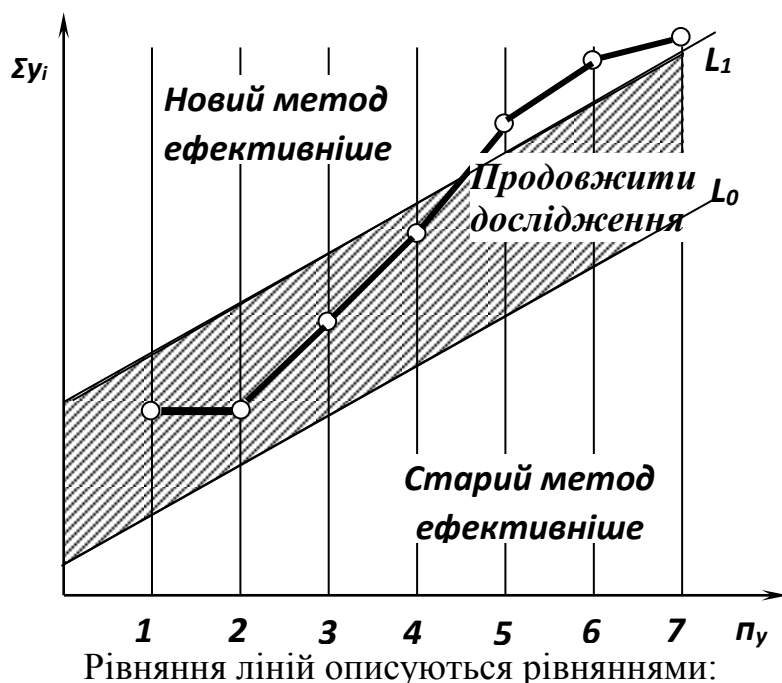
$$t_{\Delta} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\Delta}} \succ t_p. \quad (3.16)$$

Якщо $t_{\Delta}^{-} \succ t_p$, розходження вважають значимим, і навпаки.

3.1.2.4 Послідовний аналіз Вальда

Якщо при дослідженні технологічного процесу кожний експеримент достатньо складний і трудомісткий, виникає задача зведення до мінімуму кількості таких експериментів за умови підтвердження гіпотези $\bar{y} \geq \bar{x} + \Delta$ із заданою довірчою імовірністю P [8, 15]. Тут Δ – наперед задана величина, яка приймається експериментатором виходячи з технологічних, економічних та ін. міркувань.

При використанні методу послідовного аналізу Вальда математична обробка результатів виконується не після завершення серії дослідів, а після кожного досліду. У результаті цієї обробки з'ясовується, чи можна прийняти одну з конкуруючих гіпотез (і яку саме) або продовжити дослідження. Число необхідних спостережень при цьому у середньому у три рази менше, ніж при класичному аналізі. Вальд показав, що при завданні похибки першого роду α і похибки другого роду β , можна отримати у координатах $\Sigma y_i - n_y$ три області, як показано на рис. 3.2.



$$L_0 = an - b; \quad (3.17)$$

Рисунок 3.2 – Порівняння варіантів при послідовному аналізі Вальда.

$$L_1 = an + b, \quad (3.18)$$

де

$$a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}; \quad b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

(3.19)

Приклад 3.3. Витрати при впровадженні системи автоматизації одного з технологічних вузлів збагачувальної фабрики окупляться, якщо вилучення корисного компоненту підвищиться не менше, ніж на $\Delta\varepsilon = \bar{y} - \bar{x} = 2$ %. Середнє вилучення по фабриці складає $\bar{x} = 82$ % при стандартному відхиленні $\bar{S}_x = 0,8$ %. Оскільки дослідження з метою встановлення раціональності впровадження системи автоматизації технологічного вузла виявилися трудомісткими, було прийняте рішення використати метод Вальда.

Виконуємо розрахунки наступних параметрів:

*Дисперсія S_y розраховується з використанням коефіцієнта варіації V_x :

$$V_x = S_{\bar{x}} / \bar{x} = 0,8 / 82 = 0,00976 = 0,976 \text{ \%}.$$

Прийmemo, що у будь-якому випадку $V_y \leq V_x$, тоді, при

$$\bar{y} = \bar{x} + \Delta\varepsilon = 82 + 2 = 84,$$

дисперсія S_y :

$$S_y = \bar{y} \cdot V_x = 84 \cdot 0,00976 = 0,82 \text{ \%}.$$

Виберемо $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,01$ та розрахуємо коефіцієнти a і b .

$$a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} = \frac{82 + 84}{2} = 83,$$

$$b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} = \frac{0,82^2}{2} \cdot \ln \frac{0,99}{0,01} = 1,55$$

Результати розрахунків статистичної оптимізації процесу наведені у табл. 3.3

Таблиця 3.3 – Результати дослідження статистичної оптимізації процесу

№ досліджу	1	2	3	4	5	6
Y_i	83,1	83,5	83,8	84,2	84,0	84,3
$L_1=an+b$	84,55	167,55	250,55	333,55	416,55	499,55
$L_0=an-b$	81,45	164,45	247,45	330,45	413,45	496,45
ΣY_i	83,1	166,6	250,4	334,6	418,6	502,9

Результати досліджень показують, що впровадження автоматизації технологічного процесу є доцільним, тому що вже на четвертому досліді система оптимізації показує ефект (вилучення корисного компоненту Y_i досягає максимуму 84,2%), а п'ятий і шостий досліді підтверджують наявність ефекту.

3.1.2.5 Критерій Фішера (F-критерій)

Парне порівняння дисперсій

Дві вибіркові сукупності можуть не розрізнятись значимо за своїм середнім значенням, але розрізнятись за стандартними відхиленнями (або дисперсіями). Задача порівняння дисперсій виникає при порівнянні точності різних приладів або методів вимірювання, а також в розглянутих вище застосуваннях t -критерію, коли доводиться попередньо перевіряти рівність дисперсій [8, 15].

Якщо різниця між ними лежить у межах можливих випадкових коливань, то ці вибірки належать до однієї генеральної сукупності. Нуль-гіпотеза полягає у припущенні, що $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Для вирішення питання про випадкове або не випадкове розходження дисперсій розглядають відношення більшої емпіричної дисперсії до меншої:

$$S_1^2 / S_2^2 = F \succ 1. \quad (3.20)$$

Потім задають бажану надійність висновку $P = 0,95$ або $P = 0,99$ і по таблиці (додаток Б) критичне значення відношення F , що відповідає даним числам ступенів свободи f_1 і f_2 (число ступенів свободи f_1 відноситься до більшої емпіричної дисперсії). Якщо відношення (3.20), розраховане за результатами досліджень, буде більше критичного значення, то розходження дисперсій вважають не випадковим (значимим) з надійністю P .

Приклад 3.4. При визначенні вмісту міді в концентраті використані два методи аналізу. Першим методом аналізу виконано 5 вимірювань, другим – 8. Результати дослідження методів аналізу наведено у табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Результати дослідження методів аналізу

n	І аналіз			ІІ аналіз		
	x_i	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	y_i	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2$
1	27,5	0,04	0,0016	27,9	0,85	0,7225
2	27,0	- 0,44	0,1936	26,5	- 0,55	0,3025
3	27,3	- 0,14	0,0196	27,2	0,15	0,0225
4	27,6	0,16	0,0256	26,5	- 0,55	0,3025
5	27,8	0,36	0,1296	27,0	- 0,05	0,0025
6	—	—	—	27,4	0,35	0,1225
7	—	—	—	27,3	0,25	0,0625
8	—	—	—	26,8	0,25	0,0625
Σ	137,2	—	0,3700	216,4	—	1,6000
Середнє	27,44	—	—	27,05	—	—

Нуль-гіпотеза полягає у припущенні, що між методами аналізу немає розходження у відношенні відтворюваності результатів аналізів.

Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

*Вибіркові дисперсії I і II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,37}{5 - 1} = 0,0925 ;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{1,60}{8 - 1} = 0,2657 .$$

**Відношення більшої емпіричної дисперсії до меншої:*

$$F = S_y^2 / S_x^2 = 0,2657 / 0,0925 = 2,87.$$

При $f_x = 4$ і $f_y = 7$ по таблиці значень критерію Фішера (додаток Б) знаходимо $F_{(0,95; 4; 7)} = 6,09$.

Таким чином, отримане значення параметру F менше табличного і, відповідно, припущення, що між методами аналізу немає розходження у відношенні відтворюваності результатів аналізів правильне.

3.1.2.6 Критерій Кохрена (G-критерій)

Порівняння декількох дисперсій

Якщо серед декількох приладів (або декількох серій вимірювань) виявлений прилад (серія вимірювань), емпірична дисперсія S_1^2 якого помітно відрізняється від інших, необхідно з'ясувати, чи можна вважати відмінність виділеної дисперсії S_1^2 від інших випадковою чи цю відмінність слід вважати значимою [8, 15]. Для відповіді на це питання кожним з m досліджуваних приладів роблять однакове число n вимірювань, підраховують емпіричні дисперсії $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ (при цьому $S_1^2 < S_i^2$) і порівнюють найбільшу дисперсію з сумою усіх дисперсій:

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}. \quad (2.21)$$

Якщо відношення (3.21) буде більше критичного (додаток В), то відмінність першої дисперсії від інших вважається суттєвою, тобто перший прилад (перша серія вимірювань) володіє меншою точністю, ніж інші. У протилежному випадку для такого твердження немає достатніх підстав.

Приклад 3.5. Кожна з чотирьох лабораторій виконала аналіз 17 проб шихти для коксування для визначення процентного вмісту сірки при одних і тих же умовах. Дисперсії виявилися рівними відповідно 0,40; 0,25; 0,34 і 0,21. Чи можна вважати, що усі вимірювання забезпечують

однакову відтворюваність результатів, тобто розходження між дисперсіями незначиме?

Виконуємо розрахунок критерію G :

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} = \frac{0,40}{0,40 + 0,25 + 0,34 + 0,21} = 0,3333.$$

При числі ступенів свободи $f = 16$ і числі вибірок $k = 4$ по таблиці значень критерію Кохрена (додаток В) знаходимо $G_{(0,95; 17; 4)} = 0,4884$.

Таким чином, отримане значення параметру G менше табличного і можна зробити висновок, що розходження між дисперсіями незначиме і усі вимірювання забезпечують однакову відтворюваність результатів.

3.1.2.7 Критерій Пірсона (χ^2 -критерій)

Порівняння розподілу ймовірностей

Критерій узгодженості Пірсона (критерій χ^2 або "критерій хі-квадрат") використовується для перевірки гіпотези про закон розподілу. Якщо необхідно порівняти не тільки основні параметри вибірки, а й увесь розподіл імовірностей, застосовують критерій Пірсона χ^2 (додаток Г). Цим критерієм можна довести приналежність даної вибірки до нормального розподілу, довести, що два емпіричних розподіли належать до одного й того ж типу, визначити чи значимо відрізняється частота появи якої-небудь події від очікуваного значення у всіх інтервалах, де ці значення передбачені на основі теоретичних уявлень або математичної моделі [8, 15].

Нуль-гіпотеза полягає у припущенні, що між емпіричними і теоретичними розподілами не існує ніякого розходження. Вибірку з n значень ділять на m класів (інтервалів), при цьому повинно бути $m \approx \sqrt{n}$. Для кожного такого класу визначають абсолютну частоту h значень вимірюваної величини і порівнюють її з частотою h_t , що теоретично очікується у відповідності з моделлю:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t}. \quad (3.22)$$

Якщо теоретично знайдене значення h_t для окремих класів (інтервалів) достатньо велике ($h_t > 5$), то воно буде належати χ^2 -розподілу з числом ступенів свободи $f = m - k$. При цьому k задається числом параметрів, що необхідні для характеристики вибірки. Для нормального розподілу $k = 3$.

Якщо $\chi^2 \succ \chi^2_{(P;f)}$, то гіпотеза, яка перевіряється, відкидається, тобто між емпіричним і теоретичним розподілами імовірностей існує значиме розходження. Розходження незначиме, якщо $\chi^2 \prec \chi^2_{(P;f)}$.

Приклад 3.6. На збагачувальній фабриці за добу трьома змінами випущено надпланової продукції відповідно: 2, 13 і 15 т. Чи можна вважати розходження між кількістю надпланової продукції по змінах випадковим? Дані про роботу змін наведені у табл. 3.5.

Таблиця 3.5 – Результати роботи змін

Випуск надпланової продукції	Зміна			Разом
	I	II	III	
Фактичний	2	13	15	30
Очікуваний	10	10	10	30

Очікувана кількість надпланової продукції повинна бути однаковою для кожної зміни і дорівнює $h_t = 30/3 = 10$.

Виконуємо розрахунок критерію χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t} = \frac{(2-10)^2}{10} + \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(15-10)^2}{10} = 9,8.$$

Для рівня значимості $\alpha = 0,05$ і числа ступенів свободи $f = 3 - 1 = 2$ за табл. в додатку Г визначаємо параметр $\chi^2 = 6,0$. Значить випуск надпланової продукції значимо залежить від зміни.

3.2 Моделювання із застосуванням «активних» і «пасивних» методів експерименту

У практиці досліджень, оснований на плануванні експерименту і математичній обробці їх результатів одержали широке розповсюдження «пасивні» і «активні» методи експерименту.

Під «пасивним» експериментом звичайно розуміють одержання інформації про процес або об'єкти в умовах поточної експлуатації, при якій реєструються випадкові вхідні і вихідні параметри. Експериментатор знаходиться в становищі пасивного спостерігача. Завдання планування в цьому випадку зводиться до оптимальної організації збору інформації та вирішення таких питань, як вибір кількості та частоти вимірювань, вибір методу обробки результатів вимірювань. Методи обробки результатів «пасивного» експерименту базуються на класичних дисперсійному, кореляційному і регресійному аналізах.

На відміну від «пасивного» «активний» експеримент передбачає наперед заплановану зміну вхідних параметрів, що дозволяє значно скоротити кількість дослідів. Методи планування оптимальних експериментів базуються на так званій «активній статистиці» або «активному експерименті», які використовують методи крутого сходження, симплексного, еволюційного і ротатбельного центральном-композиційного планування [5].

Застосовують два методи планування експерименту: класичний (метод Зайделя-Гауса) і статистичний.

При *класичному методі* по чергово змінюється кожний фактор до визначення часткового максимуму при постійному значенні усіх інших факторів. Число дослідів необхідне для знаходження оптимальних умов процесу, залежить від числа факторів, взаємного впливу факторів і числа варіацій кожного з них. Мінімальне число дослідів буде відповідати припущенню, що взаємодія факторів відсутня, а максимальне число дослідів буде відповідати припущенню, що оптимальне значення будь-якого фактора буде суттєво змінюватись залежно від поєднання інших. Наприклад, при чотирьох факторах і п'яти варіаціях мінімально необхідне число дослідів буде $5^4 = 625$.

При дослідженні комплексних руд роблять вибіркову постановку окремих серій дослідів. При цьому у більшості випадків вдається підібрати не оптимальний режим збагачення, а тільки деяке наближення до нього.

Постановка ж повного експерименту для урахування взаємодії факторів, якщо й можлива, то малокорисна, тому що до часу закінчення експериментів результати перших виявляться непорівнянні з останніми внаслідок неконтрольованих змін властивостей вихідних матеріалів, обладнання і т.д. Крім того, більшість результатів, що отримані у таких громіздких експериментах, не являють інтересу, так як немає необхідності знати залежність параметра оптимізації в області, яка знаходиться далеко від оптимальних умов досліджуваного процесу.

Область застосування класичного методу обмежується знаходженням часткових залежностей між двома-трьома параметрами. Ці залежності являють інтерес, головним чином для теоретичної інтерпретації, особливо у випадку наявності двох або декількох екстремумів. У цьому випадку необхідно отримати експериментальні точки в усьому діапазоні зміни параметра.

Якщо метою дослідження є встановлення оптимальних умов процесу, класичний метод неефективний. Крім того, складні системи, наприклад флотаційні, часто взагалі не допускають зміни одного фактора внаслідок їхнього внутрішнього взаємозв'язку. Зміна одного фактора може служити причиною зміни інших.

Методи *статистичного планування експериментів* ґрунтуються на одночасній зміні багатьох факторів, при цьому плани експериментів допускають таку наступну статистичну обробку даних, яка дозволяє виділити вплив кожного окремого фактора і їхньої сукупності на зміну вихідних параметрів процесу. Метод статистичного планування можна застосовувати при таких обмежуючих умовах:

- існує вихідний параметр (цільова функція, функція відгуку) процесу, що кількісно і однозначно визначає його ефективність (можливо при обмеженнях, що накладаються на інші вихідні параметри);
- функція відгуку безперервна, тобто при зміні значень факторів ця функція змінюється безперервно;
- функція відгуку має один екстремум, тобто існує одне оптимальне співвідношення факторів, при якому цільова функція має максимальне (мінімальне) значення;
- відомі усі фактори, що суттєво впливають на процес, а фактори, що плануються у експерименті, управляються, тобто можна змінювати їхнє значення за раніше складеним планом;

– результати експериментів відтворювані. Похибка відтворюваності суттєво менше зміни вихідного параметра під впливом заданої зміни значень вхідних факторів.

Експериментально-статистичні методи дозволяють навіть при низькому рівні теоретичних знань про механізм процесу одержати математичну модель, яка включає усі суттєві фактори незалежно від їхнього фізичного смислу. Ці методи дозволяють при значному скороченні кількості дослідів отримати більшу інформацію, ніж при класичному методі. Статистика дозволяє оцінити надійність отриманих результатів, розрахувати довірчі інтервали окремих дослідів, екстремальних точок і коефіцієнтів рівнянь.

Припустимо, що на процес впливає тільки один фактор, тоді зміна параметра оптимізації y в залежності від фактора x може бути представлена графічно у вигляді кривої ab (рис. 3.3) і аналітично:

$$Y = f(X). \quad (3.23)$$

Така функція називається функцією відгуку, екстремум якої має координати x_{opt} і y_{opt} . При плануванні першої серії дослідів рівень фактора x_0 називається нульовим рівнем, Δx – інтервал варіювання, x_n – нижній рівень (кодується «-»), x_v – верхній рівень (кодується «+»). В результаті перших двох дослідів можна зробити висновок, що значення x необхідно збільшувати.

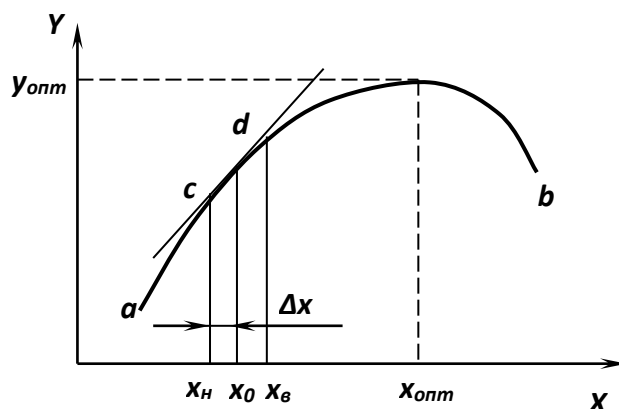


Рисунок 3.3 – Одномірна функція відгуку.

При двох факторах функція відгуку графічно може бути представлена як поверхня у тримірному просторі або рівнянням:

$$Y = f(X_1, X_2). \quad (3.24)$$

На рис. 3.4 нанесені криві рівного значення параметра оптимізації для двох змінних X_1 і X_2 .

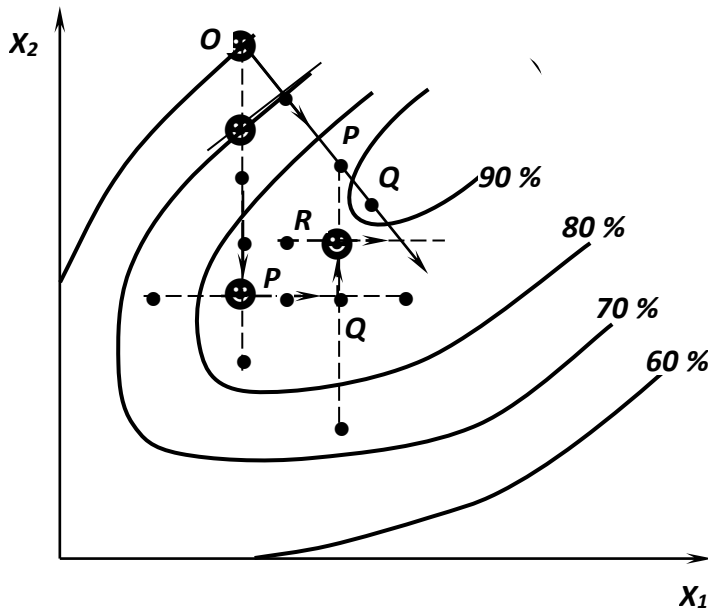


Рисунок 3.4 – Рух до максимуму поверхні відгуку методами однофакторного експерименту і крутого сходження.

При класичному методі спочатку дослідник фіксує змінну X_1 , рухається з точки O в напрямку змінної X_2 і визначає точку P , що відповідає екстремальному значенню параметра оптимізації. В точці P фіксується змінна X_2 і починається рух у напрямку осі X_1 . Що дозволяє знайти точку Q . Знову фіксується X_1 і продовжується рух по X_2 і т.д. до досягнення оптимуму. Очевидно, що більш ефективним є план, за яким первісно визначається напрямок Q , а докладніше вивчення поверхні відгуку здійснюється в оптимальній області.

У випадку великого числа факторів графічне представлення функції неможливе, а загальний вигляд аналітичного рівняння, яке її описує:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.25)$$

Ефективність планування особливо відчутна при вивченні і моделюванні багатфакторних процесів.

Досліди повинні бути рандомізовані, тобто виконуватися у послідовності, яка встановлюється за допомогою таблиці випадкових чисел, або будь-якої процедури, що забезпечує випадковий характер

проведення дослідів. Рандомізація дозволяє нівелювати систематичні (напр., періодичні) впливи факторів, що не контролюються.

3.2.1 «Пасивні» методи моделювання із застосуванням дисперсійного, регресійного і кореляційного аналізів

Обробка експериментальних даних при «пасивному» експерименті здійснюється з використанням дисперсійного, кореляційного і регресійного аналізів.

3.2.1.1 дисперсійний аналіз

В основу дисперсійного аналізу покладено принцип: якщо на випадкову величину діють взаємно незалежні фактори А, В, ..., то загальна дисперсія дорівнює сумі дисперсій, зумовлених дією окремо кожного з факторів: $\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \dots$. Таким чином, дисперсійний аналіз використовує властивість адитивності дисперсії випадкової величини, що обумовлено дією незалежних факторів.

У збагаченні корисних копалин похибка відтворюваності технологічних експериментів, яка оцінюється за допомогою дисперсії, може бути наслідком не однієї, а декількох причин або операцій. Так, наприклад, при дослідженні якості корисних копалин і продуктів їх збагачення дисперсія результатів може складатися з ряду компонентів: хімічного аналізу, відбору проби та збагачувального експерименту. Якщо відома величина компонентів дисперсії, удосконалюють відповідні операції, щоб найбільш ефективно знизити сумарну помилку експерименту [5, 8].

При напівпромислових та промислових дослідженнях важливість роздільної оцінки дисперсій, пов'язаних з варіацією сортності корисної копалини, точністю підтримки режиму збагачення і помилкою аналізу, визначається необхідністю підбору такого режиму збагачення, який одночасно з високими середніми показниками забезпечує високу стабільність результатів при зміні якості корисної копалини.

Рішення подібних задач складає предмет дисперсійного аналізу. За допомогою дисперсійного аналізу визначаються дисперсії, що обумовлені дією кожного фактора окремо і їх взаємодією, і оцінюється статистична значимість цих величин з урахуванням похибки відтворюваності.

Дисперсійний аналіз можна виконувати тільки при наступних умовах:

- серії вимірювань можна розглядати як випадкові вибірки з генеральних сукупностей, які підпорядковані нормальному розподілу;
- дисперсії, що обумовлені похибками відтворюваності, для усіх серій вимірювань однорідні. Якщо такої упевненості немає, необхідно перевірити однорідність дисперсій з використанням критеріїв Кохрена або Фішера.

Однофакторний дисперсійний аналіз

У випадку дії на процес одного фактора (найпростіший випадок), задачу можна сформулювати таким чином: нехай спостерігають m незалежних нормально розподілених величин x_1, x_2, \dots, x_m , та при цьому припускають, що усі вони мають одне й теж середнє квадратичне відхилення S . На кожному рівні (значенні) змінного входного фактора виконується n спостережень (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 – Результати спостережень

№ випробування, i	№ приладу (рівні фактора), j			
	1	2	3	m
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}
Групова середня, \bar{x}_{2pj}	\bar{x}_{2p1}	\bar{x}_{2p1}	...	\bar{x}_{2pm}

У задачі необхідно на рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх при допущенні, що групові генеральні дисперсії хоча й невідомі, але однакові.

Для рішення цієї задачі вводяться:

- *спільна сума* квадратів відхилень спостережених значень ознаки від спільної середньої:

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2; \quad (3.26)$$

– *факторна сума* квадратів відхилень групових середніх від спільної середньої (характеризує розсіювання між групами):

$$S_{факт} = m \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{cpj} - \bar{x})^2; \quad (3.27)$$

– *залишкова сума* квадратів відхилень спостережених значень групи від своєї групової середньої (характеризує розсіювання всередині груп):

$$S_{зал} = S_{cn} - S_{факт}. \quad (3.28)$$

Для обчислення спільної і факторної сум зручні такі формули:

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn}, \quad (3.29)$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j^2}{n} - \frac{\left[\sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn}, \quad (3.30)$$

де $P_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}^2$ – сума квадратів спостережених значень ознаки на рівні m_j ;

$R_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$ – сума спостережених значень ознаки на рівні m_j .

Якщо спостережені значення ознаки є порівняно великими числами, то для спрощення обчислень віднімають з кожного значення одне й теж число C , яке приблизно дорівнює спільній середній. Якщо зменшені значення $y_{ij} = x_{ij} - C$, то

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (3.31)$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[\sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (3.32)$$

де $Q_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}^2$ – сума квадратів зменшених значень ознаки на рівні m_j ;

$T_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$ – сума зменшених значень ознаки на рівні m_j .

Факторну і залишкову суми ділять на відповідне число ступенів свободи і знаходять факторну і залишкову дисперсії:

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{m-1}, \quad (3.33)$$

$$S_{зал}^2 = \frac{S_{зал}}{m(n-1)}. \quad (3.34)$$

Після цього порівнюють факторну і залишкову дисперсії по критерію Фішера:

$$F_{спост} = S_{факт}^2 / S_{зал}^2. \quad (3.35)$$

Якщо $F_{спост} < F_{кр}$ – розходження групових середніх незначиме.

Якщо $F_{спост} > F_{кр}$ – розходження групових середніх значиме.

Якщо факторна дисперсія виявиться меншою залишкової, то звідси впливає справедливність нульової гіпотези про рівність групових середніх, тому подальші обчислення (порівняння дисперсій за допомогою критерію F) зайві.

Однофакторний аналіз вимагає не менше трьох градацій фактора і не менше двох випробовувань у кожній градації.

Приклад 3.7. При сумісному аналізі точності групи вимірювальних приладів (потенціометрів) вирішується питання: чи можна вважати їхні систематичні похибки однаковими. Число потенціометрів – m ($m = 3$) і кожний з них вимірює pH однієї і тієї ж пульпи n раз ($n = 4$). Результати досліджень наведені у табл. 3.7.

Таблиця 3.7 – Результати досліджень

Число вимірювань, n	Число рівнів фактора (число потенціометрів), m		
	1	2	3
1	13,5	13,0	12,1
2	13,2	12,4	12,2
3	13,1	12,6	13,4
4	13,0	12,0	13,1
Σ	58,2	50,0	50,8
Середнє	13,2	12,5	12,7

Для спрощення обчислень віднімаємо з кожного спостереженого значення спільну середню $\bar{x} = (13,2 + 12,5 + 12,7) / 3 = 12,8$ і переходимо до зменшених величин, напр., $y_{11} = x_{11} - 12,8 = 13,5 - 12,8 = 0,7$ і т.д.

Складають розрахункову таблицю (табл. 3.8) та з використанням підсумкового стовпця обчислюють спільну, факторну і залишкову суми квадратів відхилень при числі рівнів фактора $m = 3$ і числі вимірювань на кожному рівні $n = 4$.

Таблиця 3.8 – Розрахункова таблиця

№ дослідів	Рівні фактора						Підсум- ковий стовпець
	m_1		m_2		m_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	0,7	0,49	0,2	0,04	- 0,7	0,49	
2	0,4	0,16	- 0,4	0,16	- 0,6	0,36	
3	0,3	0,09	- 0,2	0,04	0,6	0,36	
4	0,3	0,04	- 0,8	0,64	0,3	0,09	
Q_j		0,78		0,88		1,30	$\Sigma Q_j=2,96$
T_j	1,6		- 1,2		- 0,4		$\Sigma T_j=0$
T_j^2	2,56		1,44		1,69		$\Sigma T_j^2=5,69$

Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

*Спільна сума квадратів відхилень:

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = 2,96 - 0 = 2,96 .$$

**Факторна сума квадратів відхилень:*

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[\sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = \frac{5,69}{4} - 0 = 1,42.$$

**Залишкова сума квадратів відхилень:*

$$S_{\text{зал}} = S_{\text{сп}} - S_{\text{факт}} = 2,96 - 1,42 = 1,54.$$

**Факторна дисперсія:*

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{m-1} = \frac{1,42}{3-1} = 0,71.$$

** Залишкова дисперсія:*

$$S_{\text{зал}}^2 = \frac{S_{\text{зал}}}{m(n-1)} = \frac{1,54}{3(4-1)} = 0,17.$$

Порівняння факторної і залишкової дисперсії за допомогою критерію Фішера:

$$F_{\text{спост}} = S_{\text{факт}}^2 / S_{\text{зал}}^2 = 0,71 / 0,17 = 4,17.$$

По таблиці значень критерію Фішера (додаток Б) при числі ступенів свободи чисельника $f_1 = 2$, а знаменника $f_2 = 9$ знаходимо $F_{(0,95; 2; 9)} = 4,26$.

Так як $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$ немає підстав для відкидання нуль-гіпотези і, відповідно, розходження між груповими середніми незначиме, тобто усі групи спостережень вилучені з однієї генеральної сукупності.

Двофакторний дисперсійний аналіз

При збільшенні числа факторів, що впливають на результати дослідження, процедура дисперсійного аналізу принципово не змінюється, однак розрахунки ускладнюються [2, 4, 8, 21].

Задача двофакторного дисперсійного аналізу (двоступінчастої класифікації, крос-класифікації) пов'язана з експериментом, у якому

одночасно діють два фактори A і B , що варіюють на k і t рівнях відповідно.

Оцінку відтворюваності результатів досліджень за допомогою двофакторного дисперсійного аналізу розглянемо на прикладі.

Приклад 3.8. Досліджувались три реагентних режими флотаційного процесу (фактор A) для чотирьох проб корисної копалини (фактор B). На кожній пробі з кожним режимом було проведено по два досліди. Необхідно оцінити вплив цих факторів на зміну вилучення корисного компонента у концентрат. Результати досліджень наведені у розрахунковій табл. 3.9.

Таблиця 3.9 – Результати опробування і розрахунку

№ режиму (фактор A)	№ проби корисної копалини (фактор B)				X_A	X_B
	1	2	3	4		
1	2	3	2	4		
	2	4	3	2		
	$X_{11} = 4$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 5$	$X_{14} = 6$	22	484
2	1	0	1	- 1		
	2	- 1	1	- 1		
	$X_{21} = 3$	$X_{22} = - 1$	$X_{23} = 2$	$X_{24} = - 2$	2	4
3	3	6	- 2	1		
	2	5	1	2		
	$X_{31} = 5$	$X_{32} = 7$	$X_{33} = - 1$	$X_{34} = 3$	18	324
X_B	12	17	6	7	42	1764
X_B^2	144	289	36	49	518	300/160

Розрахунок виконується за формулами наведеними в табл. 3.10, де X_A – сума усіх значень варіантів рядка A ; X_B – сума усіх значень варіантів стовпця B ; X – сума усіх значень варіантів таблиці; n – число варіантів у кожній клітинці.

Таблиця 3.10 – розрахункові формули

Розсіювання	Сума квадратів	Число ступенів свободи	Дисперсія
Між стовпцями A	$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{X^2}{km}$	$f_A = k - 1$	S_A^2 / f_A
Між рядками B	$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{X^2}{km}$	$f_B = m - 1$	S_B^2 / f_B
Взаємодія факторів AB	$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X - \frac{X^2}{km} - (S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2)$	$f_{AB} = (k - 1)(m - 1)$	S_{AB}^2 / f_{AB}
Відтворюваність	$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2}{n}$	$f_Z = km \times (n - 1)$	S_Z^2 / f_Z
Сума	$S^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{X^2}{kmn}$	$f = km \times (n - 1)$	S^2 / f

З використанням формул табл. 3.10 виконуємо розрахунок наступних параметрів:

*Середні арифметичні:

$$X = \sum_{a=1}^k X_A = \sum_{b=1}^m X_B = 22 + 2 + 18 = 12 + 17 + 6 + 7 = 42;$$

$$\sum_{a=1}^k X_A^2 = 484 + 4 + 324 = 812;$$

$$\sum_{b=1}^m X_B^2 = 144 + 289 + 36 + 49 = 518;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2 = 4^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + (-1)^2 + 3^2 = 300;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 1^2 + 2^2 = 160.$$

*Сума квадратів, що характеризують розсіювання окремих спостережень під впливом:

– фактора A :

$$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{\left(\sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} = \frac{812}{4 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 28,00;$$

– фактора B :

$$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{\left(\sum_{b=1}^m X_B \right)^2}{kmn} = \frac{518}{3 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 12,83;$$

– випадкових похибок:

$$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2}{n} = 160 - \frac{300}{2} = 10,00;$$

– взаємодії факторів:

$$\begin{aligned} S_{AB}^2 &= \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\left(\sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} - (S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2) = \\ &= 160 - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} - (28 + 12 + 10) = 36,50. \end{aligned}$$

*Число ступенів свободи:

$$f_A = k - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$f_B = m - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$f_{AB} = f_A \cdot f_B = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$f_Z = km(n - 1) = 3 \cdot 4 \cdot (2 - 1) = 12.$$

* Середньозважені вибіркові дисперсії:

$$\bar{S}_A^2 = S_A^2 / f_A = 28 / 2 = 14,00;$$

$$\bar{S}_B^2 = S_B^2 / f_B = 12,83 / 3 = 4,28;$$

$$\bar{S}_{AB}^2 = S_{AB}^2 / f_{AB} = 36,5 / 6 = 6,10;$$

$$\bar{S}_Z^2 = S_Z^2 / f_Z = 10 / 12 = 0,83.$$

* Оцінка значимості факторів A , B і AB за величиною розрахованого параметра Фішера:

$$F_{A/Z} = \bar{S}_A^2 / \bar{S}_Z^2 = 14 / 0,83 = 16,87;$$

$$F_{B/Z} = \bar{S}_B^2 / \bar{S}_Z^2 = 4,28 / 0,83 = 3,55;$$

$$F_{AB/Z} = \bar{S}_{AB}^2 / \bar{S}_Z^2 = 6,1 / 0,83 = 7,35.$$

Порівнюємо розрахункові і табличні F -параметри і робимо висновки про значимість впливу досліджуваних параметрів на флотаційний процес. Результати дисперсійного аналізу наведені у табл. 3.11.

Таблиця 3.11 – Результати дисперсійного аналізу

Розходження	S^2	f	\bar{S}^2	F_p	F_{99}
По реагентних режимах (A)	28,00	2	14,00	16,87	6,93
По якості проб руди (B)	12,83	3	4,28	3,55	5,95
По взаємодії (AB)	36,50	6	6,10	7,35	4,82
Випадкове	10,00	12	0,83		
Повне	87,33				

Порівняння F -параметрів показує, що вплив факторів A і AB значимий ($F_p > F_{99}$), фактора B – незначимий ($F_p < F_{99}$).

3.2.1.2 Кореляційний і регресійний аналізи

Дисперсійний аналіз дозволяє підтвердити вплив тих або інших факторів на досліджувану результативну ознаку, але він не дає можливості визначити, ні ступінь їхнього впливу (тісноти зв'язку), ні форму залежності. Для вирішення цих питань використовують кореляційний аналіз. Щоб вивчити характер впливу однієї величини x на іншу y , виконують експеримент, при якому вимірюють значення величини y при різних значеннях величини x . Якщо дві змінні величини x і y залежать одна від одної так, що кожному значенню однієї з них відповідає цілком визначене значення іншої, то між ними є функціональний зв'язок. Цей зв'язок може бути виражений рівняннями, вид яких визначається характером існуючого зв'язку [2, 4, 8, 21].

Кореляційний аналіз дозволяє оцінювати тісноту зв'язку різних параметрів і факторів, що впливають на процес. Цей метод широко застосовується при дослідженнях промислових процесів. При визначенні коефіцієнту кореляції, якщо він достатньо високий, можна одержати інформацію, яка дозволяє вибрати основні регулювальні впливи на процес, точки і методи вимірювання факторів і установити мінімально необхідне число параметрів, що вимірюються. Якщо коефіцієнт лінійної кореляції за абсолютною величиною малий, це свідчить про більш складну (нелінійну) залежність між вимірюваними параметрами або про суттєвий вплив на них інших параметрів. У цьому випадку необхідно обчислення більш складної залежності у вигляді нелінійного рівняння. Одержання таких рівнянь методом найменших квадратів є основою регресійного аналізу.

Для кореляційного і регресійного аналізів, як правило, використовуються дані промислового процесу (записи у робочих журналах, відстежені вхідні і вихідні параметри процесів у базах даних комп'ютерів диспетчера та операторів окремих технологічних операцій) і дані спеціального опробування та спеціальних досліджень.

Регресійні моделі можна використовувати, головним чином, для аналізу впливу окремих факторів або їхньої взаємодії. Крім того, на регресійному аналізі ґрунтується планування експериментів для об'єктів, статична характеристика яких за певними каналами має екстремум.

Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів застосовується у тих випадках, коли шукані величини не можна вимірити безпосередньо або представити у

вигляді функцій вимірюваних величин. Для знаходження n невідомих величин достатньо виконати m серій спостережень ($m > n$), щоб скласти число рівнянь, необхідне для визначення невідомих величин [8, 11, 21].

При експериментальному вивченні залежності однієї величини y від іншої величини x виконують ряд вимірювань величини y при різних значеннях величини x . Наприклад, на збагачувальній фабриці отримані різні вилучення при різній тривалості флотації t . Результати дослідження, що представлені точками в координатах $\varepsilon - t$, створюють кореляційне поле (рис. 3.5).

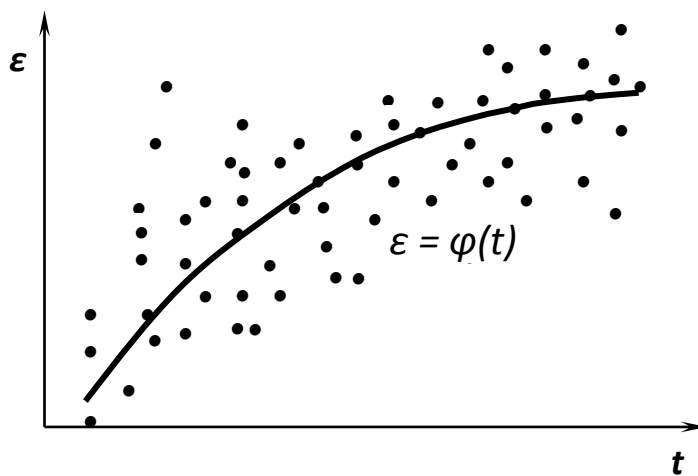


Рисунок 3.5 – Кореляційний зв'язок між тривалістю флотації і вилученням.

Через це поле можна провести криву і підібрати формулу, що описує існуючу стохастичну залежність таким чином, щоб параметри цієї кривої були найкращими (з усіх інших кривих). Наявність випадкових похибок вимірювання вказує на недоцільність підбору формули, яка точно би описувала усі дослідні значення, тобто графік шуканої функції не повинен проходити через усі точки (рис. 3.5), а повинен згладжувати випадкові похибки.

Аналітичні вирази, що вибираються на основі теоретичних уявлень, мають вигляд:

$$y = b_1 x + b_0; \quad (3.36)$$

$$y = b_2 x^2 + b_1 x + b_0; \quad (3.37)$$

$$y = b_1 e^{b_2 x} + b_0; \quad (3.38)$$

$$y = 1/(b_1x + b_0) . \quad (3.39)$$

і т.д.

У загальному вигляді:

$$y = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_n) . \quad (3.40)$$

Оцінка параметрів b_0, b_1, \dots, b_n визначається з умови, щоб сума квадратів відхилень вимірюваних значень y_n від розрахункових $\varphi(x_n, a_0, a_1, \dots, a_n)$, тобто величина

$$S^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - \phi(x_n, b_0, b_1, \dots, b_n)]^2 \quad (3.41)$$

приймала найменше значення.

Величина S^2 називається залишковою дисперсією і являє собою суму квадратів відстаней від кожної точки кореляційного поля до лінії регресії по вертикалі. Знаходження значень параметрів b_0, b_1, \dots, b_n , при яких функція набуває найменшого значення:

$$S^2 = S^2(b_0, b_1, \dots, b_n) \rightarrow \min , \quad (3.42)$$

полягає в рішенні системи рівнянь:

$$\frac{\partial S^2}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_1} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_n} = 0. \quad (3.43)$$

Система рівнянь (3.43) вирішується залежно від виду функцій (3.36) – (3.39). Найбільш вдалим є той вид формули, для якого мінімальна залишкова дисперсія S_{ad}^2 (дисперсія адекватності) є мінімальною.

Точність апроксимації оцінюється залишковою дисперсією S_{ad}^2 , яка визначається помилкою вимірювання величини y при кожному значенні x і, відповідно, не повинна суттєво відрізнятися від дисперсії відтворюваності y S_{vidm}^2 . Порівняння за критерієм Фішера:

$$F = S_{ad}^2 / S_{vidm}^2 \leq F_{P, f_1, f_2} \quad (3.44)$$

вказує на адекватність регресійної моделі.

Як міра оцінки інформативності рівняння регресії прийнято відношення дисперсій:

$$F = S_{(\bar{y})}^2 / S_{ad}^2, \quad (3.45)$$

де $S_{\bar{y}}^2$ – розсіювання відносно середньоарифметичного;

$$S_{(\bar{y})}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \text{ – середній квадрат відхилень (по ординаті)}$$

точок кореляційного поля від лінії $\bar{y} = C$;

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \phi(x_i)]^2 \text{ – середній квадрат відхилень (по ординаті)}$$

точок кореляційного поля від емпіричної лінії регресії.

При оцінці практичної цінності рівняння регресії важливий не так статистичний рівень значимості, тобто перевищення F_m , як числове значення F . Не має смислу користуватися рівнянням регресії, для якого $F = 1,4$, навіть якщо воно формально значимо. Справді, якщо квадратична похибка, яка визначає розсіювання результатів спостережень відносно рівняння регресії, менше, ніж похибка, яка характеризує розсіювання результатів відносно середнього, усього в $\sqrt{1,4} \approx 1,2$ рази, то зрозуміло, що переваги рівняння регресії у порівнянні з рівнянням $y = \bar{y}$ несуттєві.

Регресійні моделі технологічних процесів, що отримані як в результаті активного експерименту, так і в результаті пасивної обробки даних, можуть служити для розрахунку оптимальних значень параметрів. Математичні моделі містять також суттєву інформацію про вплив окремих факторів і ефектів взаємодії факторів. Величина коефіцієнтів рівняння оцінює ступінь впливу даного параметра або їхньої взаємодії. Суттєву інформацію дає знак, яким показує напрям зміни параметра оптимізації (його зменшення «–» або збільшення «+»).

Кореляція

Про наявність або відсутність зв'язку між двома випадковими величинами у першому наближенні судять по кореляційному полю [2, 5, 8, 11, 12].

Для характеристики тісноти зв'язку між величинами X і Y використовують безрозмірну величину – коефіцієнт кореляції r_{xy} , що

змінюється у межах $-1 < r_{xy} < +1$. Позитивна кореляція між випадковими величинами характеризує таку імовірнісну залежність між ними, коли при зростанні однієї друга у середньому теж буде зростати. Негативна кореляція характеризує залежність, коли при зростанні однієї випадкової величини друга у середньому зменшуватиметься. Величина коефіцієнта кореляції визначає тісноту зв'язку між випадковими величинами: чим більше значення r_{xy} , тим тісніше статистичний зв'язок. Близьке до нуля значення r_{xy} свідчить про відсутність лінійного зв'язку.

Коефіцієнт парної кореляції визначається за формулами:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}, \quad (3.46)$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3.47)$$

$$r_{xy} = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \right] - \bar{x} \bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}. \quad (3.48)$$

де n – число вимірювань; $S_{\bar{x}}$ і $S_{\bar{y}}$ – середньоквадратичні відхилення:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad \text{і} \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}. \quad (3.49)$$

Надійність статистичних характеристик слабшає зі зменшенням обсягу вибірки. Принципово можливі випадки, коли відхилення отриманої величини коефіцієнта кореляції від нуля виявляється статистично незначимим. Зв'язок можна вважати достовірним, якщо:

$$|r| \geq t S_r, \quad (3.50)$$

де r – абсолютне значення коефіцієнта кореляції; t – критерій Ст'юдента; S_r – середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції:

$$S_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} . \quad (3.51)$$

Критерій надійності коефіцієнта кореляції:

$$\mu = |r|/S_r . \quad (3.52)$$

Якщо $\mu > 2,6$, зв'язок між змінними вважається значимим.

Практично в усіх випадках статистичного дослідження реального процесу коефіцієнт кореляції є досить грубою оцінкою тісноти зв'язку, який має сенс тільки при лінійній залежності між параметрами.

Приклад 3.9. На збагачувальну фабрику надходить руда, яка містить два корисних компоненти – мінерали X і Y . При цьому в партіях сировини з підвищеним вмістом X звичайно спостерігається й більш високий вміст Y , тому є підстави очікувати, що ці величини знаходяться у зв'язку між собою. Аналізи 10 проб руди наведені у стовпцях 2 і 3 розрахункової таблиці 3.12.

Таблиця 3.12 – Вихідні дані і результати розрахунку

n	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$y_{обч}$
1	2	3	4	5	6	7
1	6,7	2,4	44,89	5,76	16,08	2,15
2	5,4	1,5	29,16	2,25	8,10	1,84
3	7,2	2,3	51,84	5,29	16,56	2,27
4	6,4	1,9	40,96	3,61	12,16	2,07
5	3,9	1,6	15,21	2,56	6,24	1,48
6	2,2	1,1	4,84	1,21	2,42	1,07
7	5,8	2,0	33,64	4,00	11,60	1,93
8	4,3	1,6	18,49	2,56	6,88	1,57
9	4,6	1,7	21,16	2,89	7,82	1,64
10	3,4	1,3	11,56	1,69	4,42	1,36
Σ	49,9	17,4	271,75	31,82	92,28	17,38
Середнє	4,99	1,74	-	-	-	1,74

Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

*Середні квадратичні відхилення:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{271,75}{10} - 4,99^2} = 1,51;$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{31,82}{10} - 1,74^2} = 0,40.$$

**Коефіцієнт кореляції:*

$$r_{xy} = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 \right] - \bar{x}\bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}} = \frac{\frac{92,28}{10} - 4,99 \cdot 1,74}{1,51 \cdot 0,40} = 0,90.$$

Одержаний коефіцієнт кореляції достатньо високий, що вказує на наявність тісного зв'язку між вмістом мінералів X і Y . Знайдемо рівняння регресії, яке дозволяє обчислити найбільш імовірний вміст одного з мінералів, якщо відомий вміст іншого.

**Коефіцієнт регресії:*

$$r \frac{S_y}{S_x} = \frac{0,90 \cdot 0,40}{1,51} = 0,24.$$

**Рівняння регресії Y по X :*

$$Y = 1,74 + 0,24(X - 4,99) = 0,54 + 0,24X.$$

З використанням рівняння регресії обчислюють значення $y_{обч}$ і порівнюють з заданими значеннями y_i . У даному випадку результат порівняння задовільний.

Множинна регресія

При вивченні множинної регресії аналітичні вирази у загальному вигляді, що вибираються на основі теоретичних уявлень про процес, мають вигляд:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (3.53)$$

Наприклад, при вивченні зв'язку між трьома змінними, дві з яких (x_1 і x_2) приймаються за незалежні, третя (y) – за функцію, їхня лінійна регресія визначається залежністю:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0. \quad (3.54)$$

З геометричної точки зору це рівняння визначає площину у просторі змінних x_1, x_2, y . Для визначення параметрів b_0, b_1, b_2 використовують спосіб найменших квадратів. Сума квадратів відхилень фактичних аплікату y_i від обчислених $y_{обч.i}$ повинна мати найменше значення:

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{обч.i})^2 \rightarrow \min. \quad (3.55)$$

Функція ϕ буде мати мінімум, якщо b_0, b_1, b_2 задовольняють системі рівнянь:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_2} = 0. \quad (3.56)$$

Диференціювання функції ϕ по змінних b_0, b_1, b_2 дозволяє одержати рівняння множинної регресії:

$$y_i - \bar{y} = b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_2), \quad (3.57)$$

де коефіцієнти b_1, b_2 визначають із застосуванням системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}). \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Для оцінки тісноти зв'язку застосовують коефіцієнт множинної кореляції, який визначається через суми квадратів відхилень :

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 - 2b_1b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3.59)$$

або через парні коефіцієнти кореляції:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx1}r_{yx2}r_{x1x2}}{1 - r_{x1x2}^2}}, \quad (3.60)$$

де парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{x1y} = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i} y_i) \right] - \bar{x}_1 \bar{y}}{S_{\bar{x}_1} S_{\bar{y}}}; \quad (3.61)$$

$$r_{x2y} = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{2i} y_i) \right] - \bar{x}_2 \bar{y}}{S_{\bar{x}_2} S_{\bar{y}}}; \quad (3.62)$$

$$r_{x1x2} = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i} x_{2i}) \right] - \bar{x}_1 \bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1} S_{\bar{x}_2}}. \quad (3.63)$$

Зв'язок можна вважати достовірним, якщо:

$$|R| \geq t S_R, \quad (3.64)$$

де – $|R|$ абсолютне значення коефіцієнта кореляції; t – критерій Ст'юдента; S_R – середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}}. \quad (3.65)$$

Критерій надійності коефіцієнта кореляції:

$$\mu = |R| / S_R. \quad (3.66)$$

Приклад 3.10. В результаті опробування процесу флотації необхідно встановити залежність між вмістом корисного компонента в концентраті (β) і відходах (ϑ) та вилученням корисного компоненту в концентрат (ε). Результати опробування і розрахункові дані наведені у табл. 3.13.

З використанням вихідних даних табл. 3.13 складають рівняння множинної регресії:

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon} + b_1(\beta_i - \bar{\beta}) + b_2(\vartheta_i - \bar{\vartheta})$$

і виконують розрахунок коефіцієнтів і складають рівняння регресії:

$$\begin{cases} b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) + b_2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 = \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}), \end{cases}$$

тобто:

$$b_1 \cdot 0,971 - b_2 \cdot 0,258 = 11,780;$$

$$-b_1 \cdot 0,258 + b_2 \cdot 0,0854 = -3,590,$$

звідки: $b_1 = 4,86$; $b_2 = -27,38$.

$$\varepsilon_i = 75,9 + 4,86(\beta_i - 7,78) - 27,38(\vartheta_i - 0,60)$$

$$\text{або } \varepsilon_i = 54,52 + 4,86\beta_i - 27,38\vartheta_i.$$

Оцінка тісноти зв'язку за коефіцієнтом множинної кореляції:

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 - 2b_1b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta})}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}},$$

тобто:

$$R = \sqrt{\frac{4,86^2 \cdot 0,971 + (-27,38)^2 \cdot 0,0854 - 4,86 \cdot (-27,38) \cdot (-0,258)}{162,9}} = 0,86.$$

Таблиця 3.13 – Результати опробування і попередні розрахунки

n	β_i	ϑ_i	ε_i	$\beta_i - \bar{\beta}$	$\vartheta_i - \bar{\vartheta}$	$\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$	$(\beta_i - \bar{\beta})^2$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2$	$(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\vartheta_i - \bar{\vartheta})$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$\varepsilon_{обч}$
1	8,0	0,48	82	0,22	- 0,12	6,1	0,0484	0,0144	37,21	- 0,0264	1,342	- 0,732	80,26
2	8,3	0,52	81	0,52	- 0,08	5,1	0,2704	0,0064	26,01	- 0,0416	2,652	- 0,408	80,62
3	8,1	0,47	80	0,32	- 0,13	4,1	0,1024	0,0169	16,81	- 0,0416	1,312	- 0,533	81,02
4	8,0	0,53	78	0,22	- 0,07	2,1	0,0484	0,0049	4,41	- 0,0154	0,462	- 0,147	78,89
5	7,9	0,62	76	0,12	0,02	0,1	0,0144	0,0004	0,01	0,0024	0,012	0,003	75,93
6	7,7	0,59	75	- 0,08	- 0,01	- 0,9	0,0064	0,0001	0,81	0,0008	0,072	0,009	75,79
7	7,5	0,65	74	- 0,28	0,05	- 1,9	0,0784	0,0025	3,61	- 0,0140	0,532	- 0,095	73,17
8	7,6	0,69	72	- 0,18	0,09	- 3,9	0,0324	0,0081	15,21	- 0,0162	0,702	- 0,351	72,75
9	7,4	0,74	71	- 0,38	0,14	- 4,9	0,1444	0,0196	24,01	- 0,0532	1,862	- 0,686	70,72
10	7,3	0,71	70	- 0,48	0,11	- 5,9	0,2304	0,0121	34,81	- 0,0528	2,832	- 0,649	70,56
Σ	77,8	6,00	759	-	-	-	0,9710	0,0854	162,90	- 0,2580	11,780	- 3,590	759,71
Сер	7,78	0,60	7,59	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76,0

Величина коефіцієнта кореляції досить велика, що свідчить про тісний зв'язок досліджуваних параметрів.

Для встановлення достовірності розраховують середньоквадратичну помилку коефіцієнта кореляції:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}} = \frac{1 - 0,86^2}{\sqrt{10}} = 0,08.$$

При $f = n - 1 = 9$ по таблиці значень критерію Ст'юдента (додаток А) знаходимо $t_{0,95} = 2,26$.

Оскільки

$$|R| > S_R \cdot t, \text{ тобто } 0,86 > 0,08 \cdot 2,26$$

отримана залежність достовірна з коефіцієнтом надійності (значимості):

$$\mu = R/S_R = 0,86/0,082 = 10,5 \quad i \quad \mu > t.$$

Таким чином, зв'язок між вмістом корисного компонента в концентраті (β) і відходах (ϑ) та вилученням корисного компоненту в концентрат (ε) слід вважати значимим. Отримане рівняння регресії дозволяє з достатнім ступенем надійності розраховувати взаємозв'язані технологічні показники ($\beta, \vartheta, \varepsilon$) у залежності один від одного.

3.2.2 «Активний» метод оптимального планування експериментів

Існує декілька методів оптимального планування експериментів, які дозволяють при мінімальній кількості дослідів отримати максимальну інформацію про досліджуваний об'єкт.

3.2.2.1. Техніка постановки «активного» експерименту

Термінологія і основні поняття

Далі ми будемо мати справу з деяким абстрактним об'єктом, на якому здійснюється експеримент. В процесі експерименту дослідник ставить дослід.

Дослід – здійснення визначеної дії на об'єкт і реєстрація одержаного результату.

На об'єкт діють *фактори*. Фактором називається вхідна незалежна змінна, яка може приймати в деякому інтервалі часу визначені значення. Кожний фактор має область визначення (або існування). Ця область може бути безперервною або дискретною, а сам фактор кількісним або якісним.

Приклад кількісного фактора – вміст твердого в пульпі, а якісного фактора – сорт руди, тип реагенту, спосіб флотації і т.п.

До кожного фактора в активному експерименті висувають такі вимоги:

- фактор повинен бути *керованим*;
- фактор повинен бути *операційним*, тобто повинні бути вказані послідовність і спосіб його установки і контролю;
- фактор повинен бути *первинним*, тобто безпосередньо діяти на об'єкт, а не бути функцією інших, більш елементарних діянь;
- фактор повинен бути *незалежним* від інших факторів;
- фактор повинен бути *вимірним* достатньо точно.

До сукупності факторів висувається вимога сумісності, тобто всі їхні комбінації здійсними, безпечні і незалежні.

Важливим поняттям є *область визначення фактора*. Ця область визначається обмеженнями. Обмеженнями можуть бути:

- *принципові*, напр., температура не може бути менше абсолютного нуля, для конкретного апарата може бути неможливою подача негативної кількості води, вміст компонента не може бути менше нуля і т.п. (це умови фізичної здійсненності);
- *технічні*, пов'язані з можливостями апаратури, дозаторів і т.п.
- *економічні*, пов'язані з дефіцитністю компонентів, тривалістю експерименту і т.п.

Зміна вхідних факторів приводить до зміни прийнятого критерію досліджуваного процесу (*критерій ефективності, параметр оптимізації, цільова функція*).

Критерій ефективності процесу – це вихідна величина, зміна якої цікавить експериментатора. Звичайно прагнуть досягти екстремального значення цього критерію. У багатьох випадках екстремум може бути технічно недосяжний, тоді знаходять найбільше (або найменше) значення критерію.

Наприклад, якщо прагнуть отримати максимальне вилучення, то саме вилучення – цільова функція, якщо прагнуть отримати максимальне вилучення при заданій якості концентрату, то фактично відшукується умовний екстремум.

Між параметрами оптимізації і факторами звичайно існує деякий функціональний зв'язок, напр.: $Y = f(X_1, X_2 \dots X_n)$.

Геометрично, функція для Y може бути представлена у вигляді поверхні, розташованої у багатомірному факторному просторі. Така, поверхня називається *гіперповерхнею*, а якщо функція f – лінійна, то *гіперплощиною*. Геометричне трактування функцій виявляється корисним, тому що у цьому випадку процес руху до екстремуму може бути ототожнений з підйомом (або спуском) на гору, правда, теж багатомірну.

Якщо залежність $Y = f(X_n)$ достатньо точно описує досліджуваний процес в області, яка цікавить експериментатора, то ця залежність називається *статичною моделлю процесу*.

Якщо у залежність включений час, тобто $Y = f(X_n, \tau)$, то така залежність називається *динамічною моделлю процесу*. Модель – це приблизний математичний опис процесу. Якість цього наближення оцінюється *помилками*.

Результат якого-небудь досліду часто називають *відгуком*, а гіперповерхню – *функцією відгуку*.

У відповідності з цим на відміну від фізичного закону модель може бути доброю або поганою. Більше того, очевидно, існує багато моделей, які описують об'єкт. Різниця між ними буде проявлятися тільки у величині помилки.

Порівняльні експерименти. Метою багатьох робіт не є встановлення деяких абсолютних змінних величин, а тільки встановлення того факту, що деякий набір факторів краще іншого. У цьому випадку, якщо постійно спостерігається різниця між наборами вихідних факторів (тобто рейтинг їх впливу близький або змінюється), можна не вимагати точних вимірювань, а з використанням методів статистики, тільки з необхідною імовірністю встановити факт, що нас цікавить.

Етапи планування експерименту

Розглянуті раніше методи регресійного аналізу базуються на обробці результатів «пасивного експерименту», напр., даних опробування промислового процесу, при цьому математичні методи застосовують тільки на останньому етапі – при обробці результатів спостережень. Планування експерименту передбачає постановку дослідів за деякою раніше складеною схемою (*матрицею*), яка має спеціальні властивості.

Планування експерименту передбачає застосування математичних методів на усіх етапах: при аналізі апіорної інформації, плануванні експерименту, обробці його результатів і прийнятті рішень на проміжних етапах (для вибору стратегії досліджень) і у кінці роботи (для інтерпретації даних).

З ускладненням об'єктів досліджень ефективність традиційного підходу до здійснення активного експерименту, відповідно до якого варіювався один фактор, а інші підтримувались на постійному рівні, різко знизилася. У традиційному підході не враховувався взаємний вплив факторів, вплив середовища та наявність зворотних зв'язків. Крім того, при традиційному підході було потрібно проведення великого числа дослідів.

При активному плануванні експерименту усі фактори, що визначають процес, змінюють (варіюють) одночасно у відповідності з правилами планування, а результати експерименту подають у вигляді математичної моделі. Виділяють такі етапи планування:

- збір і аналіз апіорної інформації;
- обґрунтування критерію ефективності досліджуваного процесу;
- вибір залежних і незалежних змінних, області зміни незалежних змінних (факторного простору);
- визначення методів контролю параметрів;
- вибір типу математичної моделі;
- розробка методики і плану (послідовність проведення) експериментів;
- розробка схеми і методики випробування;
- визначення методу аналізу експериментальних даних;
- здійснення експерименту та перевірка статистичних передумов для отримання даних;
- обробка результатів отримання математичної моделі та її інтерпретація;

– видача рекомендацій.

Розглянемо докладніше деякі етапи експериментування.

3.2.2.2 Визначення критерію процесу та незалежних факторів

Вибір критерію ефективності процесу

Критерій ефективності, оптимізації, цільова функція, вихідний параметр – усе це формалізований зміст наших прагнень і ступінь розуміння, що добре, а що погано у конкретному технологічному процесі. У будь-яких дослідженнях вибір критерію визначає їхній успіх.

Вибір критерію ефективності – складна і важлива задача. Будь-який збагачувальний процес характеризується рядом вихідних показників. Серед них:

- безпосередньо вимірювані, такі як вихід продуктів, вміст корисного компонента в продуктах, обсяги переробки, зольність вугілля тощо,
- технологічні критерії, що обчислюються: вилучення, коефіцієнт селективності і ряд інших,
- техніко-економічні, що обчислюються з використанням перших двох груп, цін і витрат: собівартість переробки, рентабельність, прибуток, продуктивність праці і т.д.

Вилучення у концентрат цінного продукту є однією з найважливіших характеристик збагачувальних процесів. Продуктивність процесу по готовому продукту – другий найважливіший показник. Третя характеристика процесу розділення – якість концентрату. Зазначені критерії процесу пов'язані між собою так, що ріст ефективності кожного з них знижує якоюсь мірою ефективність інших. Очевидно, що один показник, напр., вилучення, не може бути критерієм розділення без врахування якості концентрату. Інакше, вигідніше буде не збагачувати руду, оскільки вилучення у цьому випадку буде 100%.

Проф. Барський Л.А. сформулював вимоги до критеріїв ефективності процесу:

- а) критерій повинен бути чисельним і однозначним,
- б) критерій має враховувати кінцеву мету виробництва,
- в) критерій має бути максимально простим і, за можливістю, мати фізичний сенс.

Сьогодні існує понад 100 критеріїв і жоден з них не задовольняє повністю сформульованим вимогам.

У кожному конкретному випадку залежно від поставленої мети приймають найбільш універсальний критерій.

При плануванні екстремальних експериментів часто як критерій приймається два показники. Один з них – основний, за яким відшукується раціональний режим (екстремум), і додатковий, котрий враховує, як правило, які-небудь обмеження. Напр., при дослідженні процесу збагачення вугілля, критерієм можна прийняти умову:

$$A_{відх} \rightarrow \max$$
$$A_{к-т} < 8\% \text{ (будь-яке припустиме значення),}$$

де $A_{відх}$, $A_{к-т}$ – зольність відходів та концентрату, відповідно.

У цьому випадку при пошуку екстремуму, або найбільшого значення ($A_{відх}$) експерименти припиняють при досягненні граничного значення ($A_{к-т}$).

Визначення незалежних факторів

При дослідженні збагачувальних процесів дуже важливо виявити усі фактори, що впливають на процес, а також оцінити ступінь їхнього впливу. Якщо який-небудь із значимих факторів не включений у розгляд, але має випадкові відхилення у деякому діапазоні значень, то погрішності результатів експерименту різко зростають. З одного боку, включення до плану досліджень усіх факторів, що суттєво впливають на процес, дуже важливе, тому що експеримент, направлений на відшукування оптимальних умов, може втратити сенс, якщо один або декілька важливих (значимих) факторів не враховані. З іншого боку, включення до програми досліджень усіх факторів, що суттєво впливають на процес, ускладнює задачу – збільшує кількість експериментів і утруднює одержання адекватної моделі [4, 8, 21].

Ступінь впливу різних факторів на процес неоднакова; звичайно тільки декілька факторів суттєво впливають на кінцеву величину, а інші впливають на неї значно менше. Задача полягає у виявленні й ідентифікації суттєвих факторів на «нульовому» фоні усіх інших, при цьому необхідно ураховувати як якісні, так і кількісні характеристики суттєвих факторів. Виділити суттєві фактори можна на основі аналізу, публікацій і опитування думок спеціалістів (експертна оцінка). Для аналізу такої

апріорної інформації застосовують різні методи: дисперсійний аналіз, використання дробових і повних насичених планів експерименту, методи випадкового балансу і розгалуженої стратегії. При виборі факторів необхідно витримувати наступні умови:

- діапазони зміни факторів повинні бути технологічні і «розумні», не можна допускати таких значень, при яких можливі випуск браку або аварія;

- фактори в середині діапазону повинні підпорядковуватися усім передумовам методу найменших квадратів;

- при дуже вузькому діапазоні модель може бути неінформативною.

Остання обставина може бути проілюстрована таким прикладом: відомо, що вилучення горючої маси у флотаційний вугільний концентрат залежить від питомої витрати збирача і змінюється за експоненціальним законом (рис. 3.6). Однак при аналізі зміни вилучення ϵ в діапазоні витрати збирача $q = 1,7 - 2$ кг/т можна зробити парадоксальний висновок про незалежність вилучення від витрати збирача.

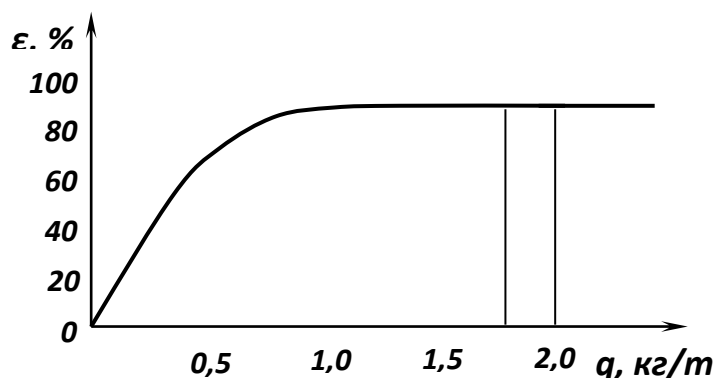


Рисунок 3.6 –
Залежність вилучення
горючої маси від
питомої витрати
збирача.

Фактори можуть мати і якісні відмінності, наприклад різні реагенти, різні конструкції і т.п.

При експериментах на обладнанні, що працює у безперервному режимі, необхідно визначити *тривалість перехідного процесу* після зміни значення будь-якого фактора. Відбір проб, зняття показань можна робити тільки в сталому режимі. Опробування слід робити тільки після закінчення часу t (рис. 3.7).

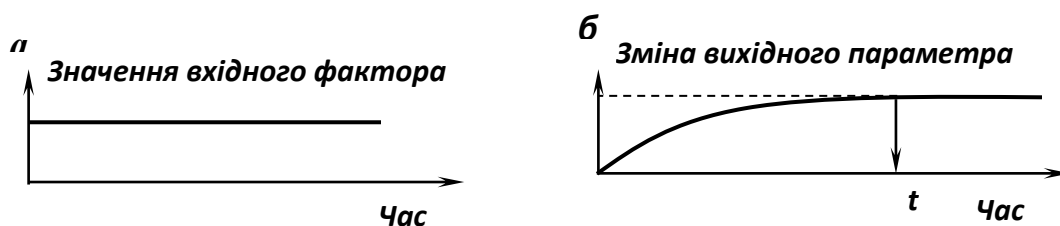


Рисунок 3.7 – Поведінка вихідного параметра при зміні вхідного фактора.

При дослідженні необхідно вибрати залежну змінну, або відгук (функцію відгуку) на вплив факторів. Відгук залежить від мети і специфіки досліджень. Він може бути технологічним (вилучення корисного компоненту у концентрат, індекс селективності і т.п.), економічним (прибуток, рентабельність і т.п.), статистичним і т.д. Відгук повинен бути чутливим до зміни факторів, легко обчислюваним, виражатися одним числом, мати фізичний смисл тощо.

Структуру моделі дослідник вибирає на основі апріорних знань та інтуїції, при цьому вибір моделі залежить також від знань про об'єкт досліджень, математичного апарату і мети досліджень. Якщо вигляд функції відгуку невідомий, її розкладають у степеневі ряди і подають у вигляді поліному. Поліноміальні моделі дуже ефективні, за певних умов розкладення у степеневі ряди можливе для усіх функцій. З використанням експериментальних даних отримують оцінки параметрів моделі:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (3.67)$$

де \hat{y} – оцінка відгуку; b – оцінки коефіцієнтів.

Для визначення оцінок коефіцієнтів застосовують метод найменших квадратів. Щоб переконатися у правильності оцінки, здійснюють статистичний аналіз, при якому перевіряють значимість коефіцієнтів і адекватність моделі. Під перевіркою значимості коефіцієнту мають на увазі перевірку гіпотези про рівність його нулю, під адекватністю розуміють відповідність моделі дослідним даним.

3.2.2.3 Вибір структури моделі і плану експерименту

Завдяки можливості використання ЕОМ можна вибирати структуру моделі у відповідності до концепції «віяла моделей». Традиційно при дослідженнях розглядалася одна модель або сукупність різних моделей і з них вибиралася єдина (т.зв. дискримінація). Концепція «віяла моделей» полягає у тому, що модель, яка придатна для прогнозування значень відгуку, часто виявляється непридатною для екстраполяції, а модель, яка добре описує процес у лабораторних умовах, виявляється непридатною для промислових умов. Все це й обумовило необхідність розгляду різних моделей без їхньої дискримінації [14].

Наприклад, спочатку розглядають достатньо просту модель, що враховує тільки лінійні ефекти:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i. \quad (3.68)$$

Потім розглядають ефекти взаємодії факторів, тобто $x_i x_j$ при $i \neq j$:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} x_i x_j, \quad (3.69)$$

після чого враховують квадратичні ефекти x_i^2 ; здійснюють перебудову незалежних змінних: $\ln x$, \sqrt{x} , $x^{3/2}$, e^x і т.п.

Розглянемо методи побудови моделей виду (3.69) із застосуванням ідеї активного планування експерименту.

Після вибору моделі (або їх сукупності) здійснюють експеримент, за результатами якого визначають параметри вибраної моделі. Активне планування експерименту передбачає проведення дослідів у відповідності з планом експерименту.

План експерименту визначає розташування дослідних точок у просторі незалежних змінних (факторному просторі), тобто умови проведення дослідів. План експерименту задається у вигляді матриці плану, напр., у вигляді таблиці кожний рядок якої відповідає умовам дослідів, а стовпчик — значенням незалежної змінної у кожному досліді. З використанням матричних позначень модель (3.69) можна записати як:

$$\hat{Y} = XB, \quad (3.70)$$

де \hat{Y} – вектор-стовпець оцінок відгуку; X – матриця плану; B – вектор-стовпець оцінок коефіцієнтів.

Модель (3.69) має вигляд:

$$Y = XB + E, \quad (3.71)$$

де Y – вектор-стовпець спостережених значень відгуку; E – вектор-стовпець погрешностей.

Стандартний шлях визначення значень B – застосування методу найменших квадратів:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (3.72)$$

У статистичному аналізі фундаментальну роль відіграє інформаційна матриця $(X^T X)/s_y^2$, а також зворотна до неї дисперсійна матриця. Вибором елементів матриці плану (матриці X) можна формувати статистичні властивості моделі.

Для подання планів у стандартній формі їх звичайно центрують з переносом початку координат у центр факторного простору. Крім того, при складанні матриці плану X , незалежні змінні x нормують і задають факторний простір:

$$-1 \leq x_i \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad x_i = (x_i^* - x_{i0}^*) / \Delta x_i^*, \quad (3.73)$$

де x_i^* – значення i -того фактору в натуральному масштабі; x_{i0}^* – значення координат i -го фактору у центрі плану в натуральному масштабі, тобто $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*) / 2$; Δx_i^* – інтервал варіювання i -го фактору, тобто $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*) / 2$.

При складанні матриці плану можна задатись умовою ротатабельності, яка полягає у тому, що дисперсія оцінки функції відгуку не залежить від відстані r точки x від центру плану. Згідно з рівнянням (3.72) ця умова може бути записана так:

$$\begin{cases} Y^T (X^T X)^{-1} Y = \text{const}; \\ r = \sqrt{(x - x_0)^T (x - x_0)} = \text{const}. \end{cases} \quad (3.74)$$

План є насиченим, якщо число дослідів дорівнює числу коефіцієнтів моделі, і ненасиченим, якщо число дослідів більше числа коефіцієнтів.

Таким чином, планування експерименту полягає у тому, щоб до постановки дослідів забезпечити оптимізацію аналізу даних, ігнорування якої значно ускладнює обчислення та інтерпретацію даних.

Поняття оптимальності плану можна трактувати по-різному. Одну й ту ж задачу можна вирішувати за допомогою різних планів. Якщо властивості плану відомі, можна здійснити експеримент і аналіз даних з найбільшою ефективністю.

Критерії оптимальності планів пов'язані з властивостями інформаційної і дисперсійної матриць. Плани можна формувати з використанням критеріїв оптимальності оцінок коефіцієнтів, напр., з мінімізацією узагальненої дисперсії коефіцієнтів. Узагальнена дисперсія коефіцієнтів моделі визначається як дисперсія вектора коефіцієнтів, вона задається визначником дисперсійної матриці. Чим менше узагальнена дисперсія, тим менше визначник. Для ортогональних планів узагальнена дисперсія дорівнює добутку дисперсій коефіцієнтів моделі. Подібна оптимальність називається *D-оптимальністю* (за першою буквою слова *Determinant* – визначник). При *D-оптимальності* точність визначення одного коефіцієнта може бути підвищена за рахунок зниження точності визначення інших. Якщо експериментатора не задовольняє ситуація, у якій він ризикує отримати деякі коефіцієнти з дуже великими дисперсіями оцінок, то він може застосувати інші критерії оптимальності. Наприклад, використати *A-оптимальні плани* (від слів *Average value* – середнє значення), для яких характерна мінімальна середня дисперсія оцінок коефіцієнтів. При цьому точність оцінок усіх коефіцієнтів буде однаковою. *A-оптимальним* планам відповідає мінімум сліду дисперсійної матриці, тобто мінімум суми діагональних елементів. Можна задатися вимогою, щоб дисперсії оцінок коефіцієнтів не були дуже великі. Цим вимогам відповідають *E-оптимальні плани* (від слів *Eigen value* – власне значення), у яких мінімізується максимальне власне число дисперсійної матриці. Використовують також інші критерії оптимальності планів. Серед критеріїв оптимальності планів, пов'язаних з прогнозними властивостями моделі, можна назвати *G-критерій*, який мінімізує максимальну дисперсію прогнозу. До планів, пов'язаних з прогнозними властивостями моделі, належать ротатабельні плани.

При реалізації будь-якого експерименту природне бажання експериментатора – скоротити число експериментів, спростити розрахунки, перейти від простої моделі, напр., першого порядку, до більш складних з використанням результатів попередніх дослідів (властивість композиційності плану) – ці вимоги необхідно враховувати при виборі того або іншого плану.

Але є небагато планів, які одночасно задовольняють багатьом критеріям оптимальності. Часто критерії оптимальності суперечливі, тому слід шукати компромісні плани: оптимальний по одному критерію і квазіоптимальний по іншим.

Розглянемо декілька найбільш показових планів експерименту, які можуть бути використані при дослідженні збагачувальних процесів і апаратів.

3.2.2.4 Факторне планування експериментів

Факторне планування дозволяє оцінювати лінійні та нелінійні ефекти взаємодії при великому числі незалежних змінних і отримувати моделі, що зв'язують залежну і незалежні змінні.

Повний факторний експеримент

У повному факторному експерименті (ПФЕ) для кожного фактора вибирається визначене число рівнів і потім здійснюються усі можливі їхні комбінації [8, 15, 21]. У факторних експериментах варіюють одночасно усіма змінними. Недоліком ПФЕ є необхідність постановки великого числа дослідів, тому що з ростом числа факторів число дослідів зростає за ступенем показника:

$$N = k^n, \quad (3.75)$$

де N – число дослідів; k – число факторів; n – число рівнів кожного фактора.

Усі можливі комбінації варіювання двох факторів на двох рівнях будуть вичерпані при постановці чотирьох дослідів ($N = 2^2$), а трьох факторів на двох рівнях – при постановці восьми дослідів ($N = 2^3$). Геометрична інтерпретація ПФЕ показана на рис. 3.8.

План експериментів формально представляється матрицею, де кожен рядок відповідає одному досліді і визначає його умови. При реалізації матриці кожен фактор може приймати тільки два значення – «верхнє» і «нижнє». Знаки «+1» або «-1» означають, на якому рівні знаходяться значення факторів («+1» – на верхньому рівні, «-1» – на нижньому).

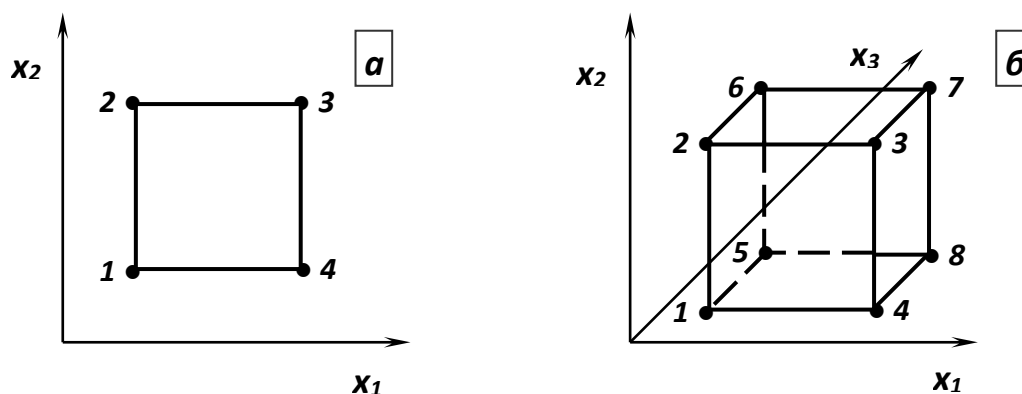


Рис. 3.8 – Геометрична інтерпретація повного факторного експеримента:
 a – план типу 2^2 ; $б$ – план типу 2^3 .

При заповненні матриці керуються правилом: частота зміни знака (рівня) кожного наступного фактора удвічі менше попереднього. Якщо в матриці перебрані всі можливі комбінації значень факторів, то матриця подає повний факторний експеримент «ПФЕ».

Наприклад: матриця повного факторного експерименту при трьох факторах наведена у табл. 3.14, відповідно число рядків матриці – $N = 2^3 = 8$. У матриці умовно не показані числа «1» (але вони там присутні).

Таблиця 3.14 – Повний факторний експеримент для трьох незалежних змінних (планування типу 2^3)

№ досліді	Фактори			Параметр оптимізації
	X_1	X_2	X_3	Y
1	-	-	-	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	-	y_4
5	-	-	+	y_5
6	+	-	+	y_6
7	-	+	+	y_7
8	+	+	+	y_8

Перед реалізацією матриці планування задаються основними рівнями факторів (у натуральних одиницях: %, г/л, кг/т і т.д.) та інтервалами варіювання для кожного фактора. Основний рівень позначають: X_{oi} , інтервал варіювання – Δx (або λ). Кодове позначення основного, верхнього і нижнього рівнів відповідно «0», «+1» і «-1».

Тоді для матриці (табл. 3.14) умови проведення першого, другого і третього дослідів (значення факторів):

$$\begin{array}{lll} X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\ X_1 = X_{o1} + \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\ X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} + \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \quad \text{і т.д.} \end{array}$$

Повний факторний експеримент для трьох факторів дозволяє окремо оцінити основні ефекти A , B , C , ефекти взаємодії першого порядку AB , AC , BC і ефект взаємодії другого порядку ABC .

Вибір нульової точки (центру експерименту) відповідає оптимальним значенням факторів на основі апріорної інформації, досвіду експериментатора і результатів збагачення аналогічних корисних копалин. При виборі інтервалу варіювання Δx керуються наступним:

- усі значення факторів у матриці повинні бути реалізованими, тобто повинні знаходитись в області існування даних факторів;
- величина інтервалу від «+1» до «-1» повинна суттєво перевищувати помилку фіксування даного фактора;
- інтервал варіювання даного фактора повинен забезпечувати вплив на вихідні параметри процесу.

При постановці експерименту досліді слід рандомізувати. Рандомізація полягає у випадковому виборі черговості постановки дослідів. Для випадкового вибору номерів дослідів можна використовувати таблицю випадкових чисел або лотерею. Рандомізацію застосовують для виключення можливої систематичної помилки дослідів.

Функція відгуку представлена поліномом першого порядку з урахуванням парних взаємодій факторів:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Завдяки ортогональності планів ПФЕ, їхньої симетричності коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулами:

$$b_0 = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u ; \quad (3.76)$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n ; \quad (3.77)$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} ; \quad i \neq j ; \quad (3.78)$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku} ; \quad i \neq j \neq k , \quad (3.79)$$

де x_{ijk} – елементи матриці планування (+1 або -1), в якій ij – номер фактора, а u – номер дослідів.

Різні знаки при коефіцієнтах свідчать про прямо- чи обернено-пропорційний вплив відповідних членів рівняння (поліному) на функцію відгуку. Якщо коефіцієнти мають один знак, то одночасна зміна факторів більше впливає на функцію відгуку, ніж індивідуальна зміна кожного фактора.

Гіпотезу про однорідність вибірових дисперсій відтворюваності перевіряють за критерієм Кохрена $G_{табл.}$ зі ступенями свободи $f_1 = m - 1$ (m – число дослідних даних у кожній серії дослідів), $f_2 = N$ і мірою ризику α :

$$\text{при} \quad G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_{i=1}^n S_y^2} \prec G_{табл} \quad (3.80)$$

гіпотеза про однорідність (рівність вибірових дисперсій одна одній) не відкидається. Розраховується оцінка дисперсії відтворюваності з ступенем свободи $f = f_1 \cdot f_2$:

$$S^2 = \left(\sum_1^n S_y^2 \right) / N . \quad (3.81)$$

У випадку неприйняття гіпотези про однорідність оцінки дисперсій відтворюваності можна збільшити число паралельних дослідів для варіантів варіювання з більшими значеннями вибірових дисперсій або визнати невідтворюваність експерименту. Для виявлення джерел неоднорідності застосовують методи дисперсійного аналізу.

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряють за допомогою критерію Ст'юдента. Коефіцієнт значимий, якщо:

$$|b_i| \geq tS_{bi} . \quad (3.82)$$

Можливі такі причини незначимості коефіцієнта регресії:

- інтервал варіювання фактора близький до оптимуму;
- інтервал варіювання вузький; чим менше інтервал варіювання, тим імовірніше, що навіть фактор з сильним впливом не виявить себе як істотний;
- параметр оптимізації процесу не залежить від варіювання фактору.

Якщо має місце перша або третя причина, значення фактора стабілізується на визначеному рівні; у другому випадку збільшують інтервал варіювання.

Після виключення незначимих коефіцієнтів перевіряють адекватність моделі – з'ясовують співвідношення між дисперсією адекватності S_{ad}^2 і дисперсією відтворюваності дослідних даних S^2 . Дисперсія адекватності S_{ad}^2 характеризує розсіювання результатів спостережень поблизу рівняння регресії, що оцінює істинну функцію відгуку:

$$S_{ad}^2 = m^{-1}(N-d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 , \quad (3.83)$$

де m – число паралельних дослідів; d – число оцінюваних параметрів в рівнянні регресії. Дисперсія адекватності оцінюється з $f = N - d$ ступенями свободи.

Якщо S_{ad}^2 не перевищує погрішності експерименту, оцінкою якої є S^2 , то вважається, що модель адекватна, а якщо $S_{ad}^2 > \delta^2$, то модель не можна вважати придатною. Адекватність перевіряється за критерієм Фішера з рівнем значимості $1 - \alpha$ і ступенями свободи $f_1 = N - d$ і $f_2 = N(m - 1)$:

якщо відношення
$$F = S_{ad}^2 / S^2 < F_{кр}, \quad (3.84)$$

модель визнається адекватною. У випадку неприйняття гіпотези про адекватність моделі переходити до розгляду більш складної моделі не слід, доцільніше, якщо це можливо, провести експеримент з меншим інтервалом варіювання факторів.

Використання повного факторного експерименту не завжди доцільне, тому що з одного боку необхідне велике число дослідів, а з іншого – на першому етапі дослідження не потрібна висока точність рівнянь апроксимуючої поверхні. Тому частіше використовують дробовий факторний експеримент «ДФЕ».

Приклад 3.11. На збагачувальній фабриці були проведені дослідження процесу фільтрування магнетитового концентрату на дисковому вакуум-фільтрі. Вивчали вплив вмісту твердого у пульпі ($X_1 = 30 - 60 \%$), величини вакууму ($X_2 = 0,03 - 0,09$ МПа) і частоти обертання дисків ($X_3 = 0,2 - 0,5$ хв⁻¹) на питому продуктивність вакуум-фільтру (Y , т/год·м²).

Для планування експерименту був використаний ПФЕ типу 2³, який дозволив оцінити усі лінійні ефекти і усі їхні взаємодії. Матриця планування і результати експериментів наведені у табл. 3.15.

Функцію відгуку моделювали поліномом першого порядку з урахуванням парних взаємодій факторів:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулами:

$$b_0 = N^{-1} = \sum_{u=1}^N \bar{y}_u; \quad b_0 = 1,21;$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} ; \quad b_1 = -0,099 ; \quad b_2 = 0,129 ; \quad b_3 = -0,179 ;$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} ; \quad b_{12} = -0,019 ; \quad b_{13} = 0,024 ; \quad b_{23} = -0,054 ;$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku} ; \quad b_{123} = -0,001 .$$

Рівняння регресії приймає вигляд:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,019\tilde{\alpha}_1x_2 + \\ + 0,024x_1x_3 - 0,054x_2x_3 - 0,001x_1x_2x_3 .$$

Перевірка гіпотези про однорідність вибірових дисперсій відтворюваності. Критерій Кохрена $G_{табл.}$ з ступенями свободи: $f_1 = m - 1 = 6 - 1 = 5$, $f_2 = N = 8$ і мірою ризику $\alpha = 0,05$: $G_{табл.} = 0,4387$

при
$$G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_{i=1}^n S_y^2} = 0,326 < G_{табл.}$$

гіпотеза про однорідність (рівність одна одної) не відкидається.

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряють за допомогою критерію Ст'юдента. Коефіцієнт значимий, якщо $|b_i| \geq tS_{bi}$.

$$S_{bi} = \sqrt{S^2 / Nm} = \sqrt{7,125 / 8 \cdot 6} = 0,0121 .$$

При $\alpha = 0,05$ і $f = N(m-1) = 40$ $t = 2,0211$.

$$b_{kp} = tS_{bi} = 2,0211 \cdot 0,0121 = 0,0244 .$$

Таблиця 3.15 – Матриця планування і результати експерименту

Інтервали варіювання. № досліду	Рівні факторів			Взаємодія факторів				Дослідні дані		Розрахунок δ
	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	\bar{y}	$S_y^2 \cdot 10^3$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Основний рівень $x_i = 0$	45	0,06	0,4							
Інтервал варіювання Δx	15	0,03	0,2							
Верхній рівень $x_i = +1$	60	0,09	0,6							
Нижній рівень $x_i = -1$	30	0,03	0,2							
№ досліду:										
1	+	+	+	+	+	+	+	1,01	2,2	1,01
2	–	+	+	–	–	+	–	1,20	5,5	1,21
3	+	–	+	–	+	–	–	0,90	7,4	0,85
4	–	–	+	+	–	–	+	1,01	9,1	1,05
5	+	+	–	+	–	–	–	1,43	18,6	1,47
6	–	+	–	–	+	–	+	1,71	3,2	1,67
7	+	–	–	–	–	+	+	1,10	0,9	1,11
8	–	–	–	+	+	+	–	1,31	10,1	1,30

Примітка. У стовпці 9 наведені середні значення функції відгуку \bar{y} (питома продуктивність вакуум-фільтру, $\text{т/год} \cdot \text{м}^2$); у стовпці 10 – дисперсія відтворюваності дослідних даних в кожній серії дослідів ($m = 6$); у стовпці 11 – результати розрахунку питомої продуктивності фільтру за отриманим рівнянням.

Таким чином, коефіцієнти b_{12} , b_{13} і b_{123} є незначимими і рівняння регресії приймає вигляд:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,054x_2x_3.$$

Перевірка адекватності моделі:

$$S_{ad}^2 = m^{-1}(N - d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 = [6 \cdot (8 - 5)]^{-1} \cdot 100,8 \cdot 10^{-3} = 5,6 \cdot 10^{-3}$$

Адекватність перевіряється за критерієм Фішера. При рівні значимості $1 - \alpha = 95\%$ і ступенях свободи $f_1 = N - d = 3$ і $f_2 = N(m - 1) = 40$ критерій Фішера $F_{кр} = 2,84$.

Відношення: $F = S_{ad}^2 / S^2 = 5,6 \cdot 10^{-3} / 7,125 \cdot 10^{-3} = 0,79 < F_{кр}$, модель визнається адекватною.

Дробовий факторний експеримент

При збільшенні числа факторів число варіантів варіювання в ПФЕ зростає за степеневим законом, напр., для дослідження 15 факторів із застосуванням ПФЕ потрібна постановка як мінімум $2^{15} = 32768$ дослідів.

Реалізувати стільки експериментів практично неможливо, перш за все через значні витрати часу і коштів. Але якщо останні й знайдуться, то за час проведення дослідів відбудуться неконтрольовані зміни сировини, обладнання та інших факторів, внаслідок чого отримані результати виявляться непорівняними. Крім того, при проведенні досліджень у багатьох випадках достатньо одержати тільки лінійну апроксимацію функції відгуку без оцінки деяких факторів взаємодії [2, 4, 6, 8].

Зменшити необхідне число дослідів можна введенням у план 2^n більшої кількості факторів, ніж передбачається матрицею планування, тобто насиченням плану до числа дослідів кратного двом, напр., для трифакторного плану потрібно поставити чотири досліди (2^2). Для скорочення числа дослідів у матрицю планування слід ввести додаткові стовпці, що характеризують ефекти взаємодії, якими можна знехтувати. Наприклад, для трифакторного плану потрібно ввести фіктивний фактор x_3

і варіювати його як вектор-стовпець x_1x_2 . Таким чином, можна поставити чотири досліди замість $2^3 = 8$.

Звичайно плани дробового факторного експерименту (ДФЕ) позначають 2^{n-p} . З множини n факторів відбирають p допоміжних і $n - p$ основних факторів, для яких будують повний факторний план. Цей план потім доповнюють p стовпцями, що відповідають факторам, які залишилися.

Спосіб утворення кожного з p стовпців визначається генераторами плану ДФЕ – добутками основних факторів. У випадку плану 2^{n-p} повинно бути p генераторів. У випадку плану 2^{3-1} генератор плану рівний $x_3 = x_1x_2$.

Отриманий план (табл. 3.16) є напівреплікою (половиною) повного факторного плану, при цьому усі властивості повного факторного експерименту збережені.

Таблиця 3.16 – Дробовий факторний експеримент для трьох незалежних змінних (планування типу 2^{3-1})

№ досліду	Фактори			Параметр оптимізації
	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	y
1	-	-	+	y_1
2	-	+	-	y_2
3	+	+	+	y_3
4	+	-	-	y_4

Матриця ДФЕ являє собою $1/2$, $1/4$, $1/8$ і т.д. репліку, у якій стовпець одного з ефектів отримують перемноженням стовпців інших ефектів.

При виборі дробових реплік необхідно визначити і проаналізувати з урахуванням апріорної інформації змішування оцінок коефіцієнтів моделі. Для цього розраховують визначний контраст ДФЕ. Пояснимо його на прикладі дробової репліки 2^{3-1} . Для добутку трьох стовпців матриці виконується співвідношення $x_1x_2x_3 = +I$ – це і є визначний контраст. Таким чином, контраст – це добуток лівої і правої частин рівняння, що визначає генератори плану. Наприклад, для плану 2^{5-2} як генератори слід узяти співвідношення $x_4 = x_1x_3$ і $x_5 = x_1x_2x_3$. Визначні контрасти плану – $x_1x_3x_4$ і $x_1x_2x_3x_5$.

Узагальнюючий контраст плану будується з визначних контрастів та їхніх добутків у всіх можливих поєднаннях $n = 2, 3, \dots, p$. При перемноженні контрастів з урахуванням, що $x^2 = I$, отримують ще один

контраст $x_2x_4x_5$. Таким чином, узагальнюючий контраст рівний $x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5$.

При перемноженні усіх складових узагальнюючого контрасту на фактори з урахуванням, що $x^2 = 1$, отримують правило змішування коефіцієнтів:

$$x_1 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5;$$

$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_5;$$

$$x_3 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5;$$

$$x_4 = x_1x_3 = x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5;$$

$$x_5 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4 = x_1x_2x_3;$$

$$x_{12} = x_2x_3x_4 = x_1x_4x_5 = x_3x_5;$$

$$x_{23} = x_1x_2x_4 = x_3x_4x_5 = x_1x_5,$$

тобто $b_1 = \beta_{34} + \beta_{1245} + \beta_{235} + \beta_1$ і т.п.

Залежно від вибору генераторів отримують дробові факторні плани з різною вирішувальною здатністю. Число елементів у контрасті визначає вирішувальну здатність плану.

Слід віддавати перевагу дробовим факторним планам з найбільшою вирішувальною здатністю – головним дробовим факторним планам.

Для оцінок коефіцієнтів і аналізу моделей з використанням ДФЕ і ПФЕ застосовують одні й ті ж формули.

3.2.2.5 Метод крутого сходження

Факторне планування може успішно застосовуватись тільки тоді, коли дослідник знаходиться у оптимальній області. Вибір переважних факторів і оцінка їхньої значимості за коефіцієнтами лінійної регресії дозволяє спланувати наступні експерименти для досягнення оптимальної області найкоротшим шляхом [2, 4, 8, 15, 21].

Найкоротша відстань до максимуму (мінімуму) безперервної однозначної функції відгуку з будь-якої точки визначається градієнтом – прямою, яка перпендикулярна ізолініям параметру оптимізації (див. рис. 3.4):

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial X_j} \bar{j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_m} \bar{m}, \quad (3.85)$$

де $\partial f / \partial X_i$ – частинна похідна функції відгуку по i -му фактору; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{m}$ – одиничні вектори у напрямку координатних осей факторного простору.

Оцінками частинних похідних $\partial f / \partial X_i$ є коефіцієнти лінійної регресії b_i , отже, для руху по градієнту необхідно змінювати фактори пропорційно їхньому коефіцієнту регресії та у той бік, куди указує знак коефіцієнту. Цю зміну факторів називають кроком крутого сходження. У більшості випадків за крок крутого сходження кожного фактора можна приймати його коефіцієнт в моделі, виражений в одиницях вимірювання фактора. Для цього обчислюється добуток коефіцієнтів на інтервалі варіювання $b_i \Delta x_i$, і фактор з максимальним добутком приймається за базовий b_{iB} . Для нього вибирають крок варіювання Δx_{iB} . Пропорційно до базового визначають кроки й по інших факторах:

$$\Delta x_i = \Delta x_{iB} b_i / b_{iB}, \quad (3.86)$$

де Δx_i – новий крок варіювання для i -го фактора.

Кроковий процес руху по поверхні відгуку продовжується доти, доки дослідник не потрапить в екстремальну область, де лінійне наближення вже виявляється недостатнім. Момент переходу через екстремум буде супроводжуватися погіршенням значення вихідного параметра (параметра оптимізації). Таким чином, визначається оптимальна область.

Базовий крок варіювання визначається на основі тих же уявлень, що й первинний інтервал варіювання. Для якісних факторів на двох рівнях або фіксується кращий рівень, або градієнт реалізується двічі для кожного рівня окремо. Незначні фактори стабілізуються на будь-якому рівні у інтервалі ± 1 . Якщо немає спеціальних зауваг, вибирають нульовий рівень. Якщо ж, наприклад, за економічними міркуваннями доцільно

підтримувати нижній рівень, то вибирають його. У русі по градієнту ці фактори не беруть участь.

Рух по градієнту можливий і у випадку отримання неадекватної моделі. У експеримент можуть бути включені й деякі фактори, коефіцієнти при яких виявилися незначимими, але вони важливі з технологічних міркувань. Причиною незначимості коефіцієнтів може бути невірний вибір інтервалів варіювання.

Приклад 3.12. *Необхідно визначити оптимальні умови флотації цинкової руди.*

Фактори, їхні основні рівні й інтервали варіювання вибирали з урахуванням умов роботи збагачувальної фабрики. Вивчали вплив шести факторів (x_1 – тривалість перемішування з мідним купоросом, хв.; x_2 – витрата бутилового ксантогенату, г/т; x_3 – витрата мідного купоросу, г/т; x_4 – тривалість аерації, хв.; x_5 – тривалість флотації, хв.; x_6 – витрата дітіофосфату, г/т) на індекс селективності – параметр y :

$$y = \sqrt{\varepsilon(1-R)/[R(1-\varepsilon)]}, \quad (3.87)$$

де $\varepsilon = \gamma\beta/\alpha$ – вилучення корисного компонента у концентрат, частки од.; α, β – вміст металу у вихідному продукті і концентраті, частки од.; γ – вихід концентрату, частки од.; R – вилучення породного компонента у концентрат, частки од.

$$R = \sqrt{\frac{\varepsilon(1-R)}{R(1-\varepsilon)}}. \quad (3.88)$$

Використано $1/4$ репліки від факторного експерименту 2^{6-2} , реалізовано 16 дослідів.

За даними результатів ДФЕ (табл. 3.17) отримані оцінки коефіцієнтів регресії для вибраного параметру оптимізації y . Статистичний аналіз отриманого рівняння регресії показав, що воно адекватне з надійністю 95 %.

Таблиця 3.17 – Результати проведення ДФЕ

Фактор	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_4	\tilde{x}_5	\tilde{x}_6
Основний рівень	3	15	50	7,5	8	10
Крок варіювання	–	10	– 4	– 1	1	3,5
Інтервал варіювання	2	10	15	7,5	2	6
Коефіцієнти регресії	0,3	0,768	– 0,196	– 0,197	0,31	0,44

Послідовність застосування методу крутого сходження пояснюється табл. 3.18.

Таблиця 3.18 – Результати, що отримані при оптимізації цинкової флотації методом крутого сходження

№ дослідів	Фактори						Індекс селективності
	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_4	\tilde{x}_5	\tilde{x}_6	
1	5	25	46	6,5	9	13,5	–
2	5	35	42	5,5	10	17,0	14,86
3	5	45	38	4,5	11	20,5	16,43
4	5	55	34	3,5	12	24,0	17,65
5	5	65	30	2,5	13	27,5	15,83
6	5	75	26	1,5	14	31,0	14,36

За базовий прийнятий фактор x_2 , тому що добуток коефіцієнта b_2 на інтервал його варіювання ($\Delta x_2 = 10$) дорівнює 7,68, тобто максимальний. Фактор x_1 у розрахунках не враховується і його рівень фіксований: $\tilde{x}_1 = 5$. Реалізація експериментів у точках 1 – 6 методу крутого сходження дозволила істотно покращити процес: досягти індексу селективності 17,65.

Таким чином, методом крутого сходження були визначені оптимальні умови процесу флотації цинкової руди: витрати бутилового ксантогенату, мідного купоросу і дітіофосфату – відповідно 55, 34 і 24 г/т; тривалість аерації, флотації і перемішування з мідним купоросом – відповідно 3,5; 12 і 5 хв (незначимий фактор). Визначення оптимальних умов флотації з урахуванням шести факторів потребувало постановки 22 дослідів (16 дослідів по ДФЕ 2^{6-2} і 6 дослідів крутого сходження).

3.2.2.6 Еволюційне планування експериментів

Метод крутого сходження особливо ефективний при проведенні лабораторних досліджень, але у промислових умовах похибки вимірювань збільшуються у зв'язку із впливом додаткових неврахованих факторів. Крім того, не завжди можна варіювати змінними у великому діапазоні.

Еволюційне планування є подальшим розвитком методу крутого сходження. В промислових умовах на фоні впливу багатьох випадкових факторів (так званих шумів) необхідно встановити вплив досліджуваних факторів і при цьому не порушити виробничий процес. У таких умовах доцільно використовувати метод еволюційного планування.

При еволюційному плануванні, як і при методі крутого сходження, вибирається матриця планування і рівні варіювання. Досліди проводяться декількома послідовними циклами. Кожний цикл являє собою одноразову постановку усіх дослідів за прийнятою матрицею досліджень. Серії однакових циклів складають фази досліджень. Після закінчення кожної фази можна змінити рівні варіювання матриці планування, перенести центр експериментів у кращу точку і ввести нові незалежні змінні. При еволюційному плануванні велику роль відводять технологічному аналізу отриманих результатів і обговоренню результатів кожної фази планування. Обробка результатів експериментів виконується тільки для циклів однієї фази. Фази при еволюційному плануванні математично не залежать одна від одної. Для усіх циклів кожної фази матриця планування і рівні варіювання залишаються незмінними.

Основним недоліком методу еволюційного планування є необхідність постановки великої кількості дослідів, тобто nN , де N – кількість циклів. Збільшення часу досліджень веде до нових труднощів, тому що змінюються характеристики сировини, обладнання та ін. Для запобігання впливу цих факторів виконують так зване блокове планування.

Блок-схема логічної послідовності виконання етапів досліджень при еволюційному плануванні наведена на рис. 3.9.

1. Визначити фактори дослідження і цільову функцію. Кожний фактор і цільова функція повинні мати чисельні визначення. Прийняти верхній x_j^+ і нижній x_j^- рівні варіювання для кожного фактора. Вибрати матрицю планування дослідів. Доповнити матрицю дослідями в центральній точці.

2. Реалізувати за матрицею планування два дублюючих цикли дослідів.

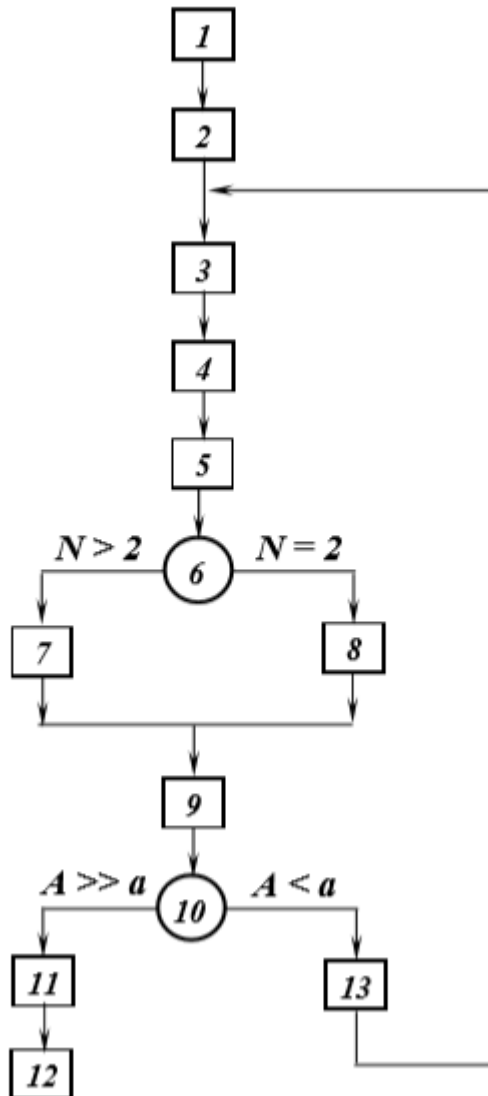


Рисунок 3.9 - Схема проведення досліджень методом еволюційного планування.

3. Знайти середній результат з усіх N циклів (у першому випадку з двох циклів – $N = 2$) по кожному i -тому режимному рівню (точці) матриці планування:

$$\bar{y}_i^{(N)} = \frac{\sum_{k=1}^N y_{ik}}{N}, \quad (3.89)$$

де k – номер циклу; N – число циклів.

4. Знайти ефекти по кожному j -тому фактору A_j і ефект зміни в середньому A_0 :

$$A_j = \frac{2 \sum_{i=1}^n y_i^{(N)} x_{ij}}{n} ; \quad A_o = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}^{(N)} - n \bar{y}_0^{(N)}}{n - c} , \quad (3.90)$$

де $\bar{y}_i^{(N)}$ – середній результат по i -тому режиму з усіх поставлених циклів; n – число точок матриці планування (без центральної точки); c – число дослідів, які поставлені в центральній точці.

5. Знайти різницю r_i між середнім значенням попередніх циклів $\bar{y}_i^{(N-1)}$ і результатом даного циклу $Y_i^{(N)}$ по кожній i -тій режимній умові:

$$r_i = \bar{y}_i^{(N-1)} - Y_i^{(N)} . \quad (3.91)$$

У першому випадку визначається різниця між результатами першого і другого циклів, у другому – різниця між середнім першого і другого циклів і результатом третього і т.д.

За мінімальним і максимальним значеннями r_i визначають розмах:

$$R = r_{\max} - r_{\min} . \quad (3.92)$$

За даними R і k (табл. 3.19) знаходять похибки дослідів $\sigma_y = Rk$.

6. Якщо поставлено більше двох циклів ($N > 2$). Знаходять помилку по усіх циклах:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sum_{k=1}^N \sigma_{yk}}{N-1} . \quad (3.93)$$

7. Якщо циклів два ($N = 2$), $\bar{\sigma}_y$ не визначається, тому що по першому в другому циклам можна знайти тільки середньоквадратичне відхилення σ_y .

8. Знаходять довірчий інтервал для ефектів:

$$a = \frac{t \sigma_y}{2^{0,5m-1} \sqrt{N}} ; \quad a_0 = 0,9a , \quad (3.94)$$

де t – критерій Ст'юдента для $f = n(N-1)$; m – число факторів.

Таблиця 3.19 – Значення коефіцієнта k

Число циклі в N	Число дослідів в матриці планування з урахуванням центральної точки (n + c)								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,63	0,42	0,34	0,30	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23
3	0,72	0,48	0,40	0,35	0,32	0,30	0,29	0,27	0,26
4	0,77	0,51	0,42	0,37	0,34	0,32	0,30	0,29	0,28
5	0,79	0,53	0,43	0,38	0,35	0,33	0,31	0,30	0,29
6	0,81	0,54	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,31	0,30
7	0,82	0,55	0,45	0,40	0,37	0,34	0,33	0,31	0,30
8	0,83	0,55	0,45	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31	0,30
9	0,84	0,56	0,46	0,40	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
10	0,84	0,56	0,46	0,41	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
11	0,84	0,56	0,46	0,41	0,38	0,35	0,33	0,32	0,31
12	0,85	0,57	0,47	0,41	0,38	0,35	0,34	0,32	0,31

9. Перевіряють достовірність ефекту $A^* = A \pm a$.

10. Якщо значення коефіцієнта $A > a$, можна визначити регулюючу дію $\Delta_j = A_j k^*$, де k – коефіцієнт пропорційності, який береться з урахуванням можливостей процесу і уявлення про нього.

11-12. Поставити дослід з коректованими значеннями факторів і проаналізувати з технологічної точки зору отримані результати, після чого намітити нову фазу досліджень або поставити ще один дослід з коректованим значенням факторів $x_j^{нов} = x_j^{попер} + \Delta_j$.

13. Якщо значення коефіцієнтів менше або порівнянне з інтервалами $A < a$, отримане значення ефекту випадкове, вплив факторів не виявлений і потрібно повторити цикл при тих же режимах матриці планування.

Приклад 3.13. Досліджується робота збагачувальної фабрики. Необхідно вибрати оптимальне співвідношення двох типів руд в шихті x_1 і x_2^m . Результати дослідів оцінюються ступенем вилучення ε .

1. Намічаємо матрицю планування дослідів з однією центральною точкою і вибираємо для першої фази варіювання факторів нижні рівні $x_1^- = 20$, $x_2^- = 20$ і верхні рівні $x_1^+ = 30$, $x_2^+ = 40$. Знаходимо значення основного рівня для центральної точки: $x_1^0 = 25$, $x_2^0 = 30$.

2. Виконуємо досліді відповідно до режимів матриці планування (перший цикл), а потім повторюємо їх (другий цикл). Отримані результати дослідів наведені в табл. 3.20.

Таблиця 3.20 – Результати дослідів I і II циклів

№ режиму (дослід)	Матриця планування			Результати дослідів в циклах ε , %		
	x_1	x_2	x_1x_2	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
Центральний	x_1^0	x_2^0		60	64	64
1	x_1^-	x_2^-	+	37	25	31
2	x_1^+	x_2^+	+	75	73	80
3	x_1^+	x_2^-	–	54	72	62
4	x_1^-	x_2^+	–	52	46	51

3. Розраховуємо середнє значення результатів першого і другого циклів \bar{y}_i^2 і різницю в результатах першого і другого циклів по кожному режиму. Результати розрахунків представлені таблицею 3.21.

Таблиця 3.21 – Середнє значення результатів дослідів I і II циклів

Показники	Режим опиту				
	0	1	2	3	4
Результат циклу:					
першого y_2^1	60	37	75	54	52
другого y_1^2	64	25	73	72	46
Різниця r_i	– 4	12	2	– 18	– 6
Середній результат з урахуванням I і II циклів	62	31	74	64	49

За найбільшим негативним значенням $r_{\min} = -18$ і найбільшим позитивним $r_{\max} = 12$ визначаємо розмах: $R = 12 - (-18) = 30$.

4. Визначаємо ефекти по кожному фактору за формулою (3.90):

$$A_1 = \frac{2 \cdot (-31 + 74 + 64 - 49)}{4} = 29; \quad A_{12} = \frac{2 \cdot (31 + 74 - 64 - 49)}{4} = -4;$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot (-31 + 74 - 64 + 49)}{4} = 14; \quad A_0 = \frac{2 \cdot (31 + 74 + 64 + 49 - 4 \cdot 62)}{4 + 1} = -6.$$

5. За даними табл. 2.26 для $N = 2$ і $n = 4 + 1 = 5$ знаходимо значення коефіцієнта $k = 0,30$ і визначаємо помилку дослідів $\sigma_y = 30 \cdot 0,3 = 9$.

6. З використанням додатка А при рівні значимості $P = 0,05$ знаходимо критерій Ст'юдента ($t = 2,77$) і за формулою (3.94) для отриманих ефектів визначаємо довірчі інтервали:

$$a_1 = a_2 = \frac{2,77 \cdot 9}{2^{0,5 \cdot 2} \cdot \sqrt{2}} = 17,63 \approx 18; \quad a_0 = 0,9 \cdot 18 = 16,2.$$

Отриманий для ефектів довірчий інтервал дуже великий ($a > A$), тому не можна стверджувати, що розраховані значення ефектів є наслідком впливу факторів, а не випадковою величиною внаслідок похибок дослідів.

7. При тих же умовах ставиться новий цикл дослідів. Результати третього циклу наведені в табл. 3.22.

Таблиця 3.22 – Результати дослідів III циклу

Показники	Режим досліду				
	0	1	2	3	4
Середній результат попередніх дослідів \bar{y}_i^2	62	31	74	64	49
Результат III циклу y_i^3	64	31	80	62	51
Різниця r_i	-2	0	-6	+2	-2
Новий середній результат з урахуванням I, II і III циклів \bar{y}_i^3	63	31	77	63	50

8. Після розрахунку нового середнього результату визначають розмах, який тепер дорівнює: $R = 2 - (-6) = 8$.

9. Нова похибка досліду складає $\sigma_y = 8 \cdot 0,35 = 2,8$.

10. Визначаємо нові значення ефектів:

$$A_1 = \frac{2 \cdot (-31 + 77 + 63 - 50)}{4} = 29,5; \quad A_{12} = \frac{2 \cdot (31 + 77 - 63 - 50)}{4} = -2,5;$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot (-31 + 77 - 63 + 50)}{4} = 16,5; \quad A_0 = \frac{2 \cdot (31 + 77 + 63 + 50 - 4 \cdot 63)}{4 + 1} = -6,2.$$

11. Визначаємо середню помилку: $\sigma_y = (9 + 2,8) / 2 = 5,9$.

12. Визначаємо нові довірчі інтервали:

$$a_1 = a_2 = \frac{2,3 \cdot 5,9}{\sqrt{3}} = 7,8; \quad a_0 = 0,9 \cdot 7,8 = 7,0.$$

13. Отримані значення для довірчих інтервалів менше ніж значення факторів $A^* = 29,5 \pm 7,8$, $A_2^* = 16,5 \pm 7,8$. Ефект взаємодії зменшився у порівнянні з попереднім циклом, але його величина не виходить за межі довірчого інтервалу $A_{12}^* = 2,5 \pm 7,8$. Тому можна вважати, що взаємодії факторів немає і отримане значення, яке дорівнює 2,5, випадкове, тобто фактично $A_{12} = 0$.

14. Ефект зміни у середньому $A_0 = -6,2$ порівнюється з помилкою $a = 7,0$. Це вказує на те, що область досліджень знаходиться далеко від оптимуму, для визначення якого значення факторів можна змінювати за лінійним законом. Приймаємо коефіцієнт пропорційності для зміни факторів, $k^* = 0,35$, тоді регулююча дія для них буде:

$$\Delta_1 = k^* A_1 = (29,5 \pm 7,8) \cdot 0,35 = 10,3 \pm 2,7 \approx 10 \pm 3;$$

$$\Delta_2 = k^* A_2 = (16,5 \pm 7,8) \cdot 0,35 = 5,8 \pm 2,7 \approx 6 \pm 3.$$

Коректоване значення факторів повинно знаходитись в межах:

$$x_1 = x_1^0 + \Delta_1 = 25 + (10 \pm 3) = 38 - 32;$$

$$x_2 = x_2^0 + \Delta_2 = 30 + (6 \pm 3) = 39 - 33.$$

Незважаючи на те, що отримане статистично достовірне значення факторів, похибка дослідів приводить до великого діапазону їхнього коректування. Для зниження цих меж доцільно поставити четвертий цикл дослідів. Обробка результатів для нього аналогічна.

3.2.2.7 Симплексний метод планування експериментів

Симплексний метод планування експериментів у порівнянні з методом крутого сходження при аналізі одного параметра оптимізації більш громіздкий і менш точний, але більш простий [6, 8, 15].

Сутність симплексного методу полягає у тому, що перша серія експериментів ставиться так, щоб точки, які відповідають умовам проведення дослідів, створювали правильний (регулярний) симплекс у багатомірному просторі. Правильний симплекс – це множина $n + 1$ рівновіддалених одна від одної точок у n -мірному просторі. Для $n = 2$ це рівнобічний трикутник, для $n = 3$ – тетраедр і т.д. Правильний симплекс з центром на початку координат у n -мірному просторі задається матрицею:

$$\begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ -R_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ 0 & -R_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & R_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

де $k_i = 1/\sqrt{2i(i+1)}$; $R_i = 1/\sqrt{2(i+1)}$; $i = 1, 2, \dots, n$.

У матриці кожний рядок відповідає одному з дослідів серії. У стовпчиках вказані кодовані значення факторів при одиничній довжині ребра симплексу. Наприклад, для двомірного простору $k_1 = 0,5$; $R_1 = 0,5$; $k_2 = 0,2887$; $R_2 = 0,4082$. Вершини початкового симплексу мають такі координати: $(-0,5; -0,2887)$; $(0,5; -0,2887)$; $(0; 0,4082)$. Перед проведенням експериментів необхідно вибрати інтервал варіювання кожного фактора і прийняти його рівним одиниці. Після побудови вихідного симплексу і проведення дослідів результати аналізують і вибирають вершину симплексу, в якій отримане найменше значення цільової функції (при пошуку максимуму).

Для руху до оптимуму необхідно поставити дослід у точці, яка є дзеркальним відображенням точки з мінімальним значенням функції відносно протилежної грані симплекса.

Для визначення умов проведення досліду у відображеній точці використовують формулу:

$$x_{ij}^{n+2} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{ij} - x_{ij}^*, \quad (3.96)$$

де x_{ij}^{n+2} – координата нової точки; x_{ij}^* – координата точки, яка відповідає найгіршому результату; $\sum_{i=1}^n (x_{ij})$ – сума координат усіх точок симплексу крім найгіршої.

На рис. 3.10 ілюструється рух правильного симплекса до екстремуму поверхні відгуку, представлений лініями рівного значення критерію ефективності двофакторного процесу (фактори X_1 і X_2).

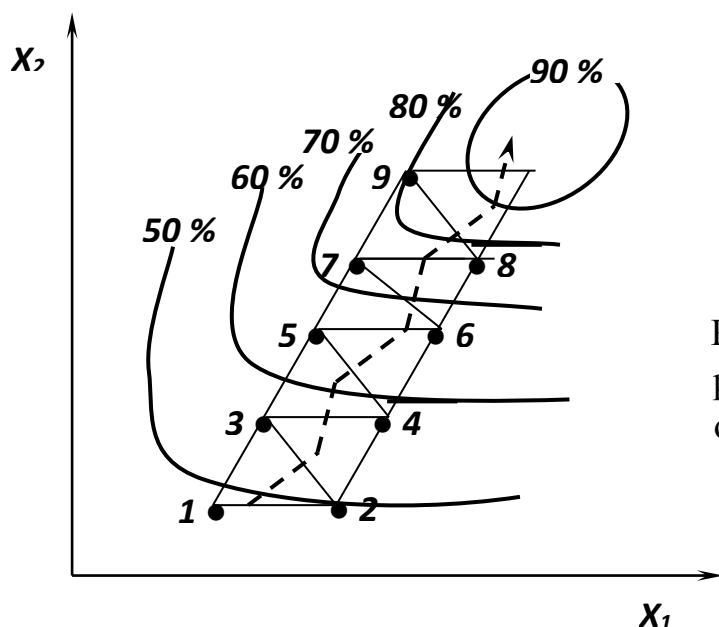


Рисунок 3.10 – Схема руху до оптимальної області симплексним методом.

Досліди, поставлені у вершинах симплексу 1,2 і 3 показали, що найгіршим результатом виявився дослід 1. Наступний дослід ставиться у вершині 4, яка є дзеркальним відбиттям вершини 1 і створює з вершинами 1 і 2 новий симплекс. Далі порівнюються досліди у вершинах 2, 3 і 4. Найгірший результат (вершина 2) замінюють новою – вершиною 5, де проводиться наступний експеримент і т.д. При досягненні області оптимуму розмір симплекса зменшують. Умова досягнення оптимуму така:

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y_i - y_m)^2} \right) / n \leq \varepsilon, \quad (3.97)$$

де ε – задана мала величина; y_m – середнє значення відгуку у вершинах симплекса.

Доцільно у кожній вершині симплекса досліди повторити декілька разів і в подальшому враховувати математичне очікування функції відгуку.

До переваг послідовного симплексного методу відносять простоту, високу ефективність (підвищується зі збільшенням числа параметрів оптимізації), можливість застосування у випадку тимчасового дрейфу характеристик об'єкта і поєднання вивчення поверхні функції відгуку з рухом симплекса до екстремуму. Недоліки даного методу – у неможливості опису поверхні відгуку (однак за даними, що отримані в результаті руху симплексів, можна побудувати рівняння регресії) і неможливості урахування якісних змін факторів.

Незважаючи на переваги, метод часто характеризується слабкою збіжністю і порівняно високою похибкою визначення оптимальних значень факторів в області екстремуму цільової функції, які обумовлені, головним чином, суб'єктивним вибором інтервалу зміни факторів, а також відбиттям симплексу без урахування поведінки цільової функції у досліджуваній області.

Приклад 3.14. *Необхідно із застосуванням симплекс-методу знайти оптимальну область флотації вугілля (табл. 2.23).*

Двовірність факторного простору дозволила показати на рис. 3.11 схему руху симплекса у процесі пошуку. Факторами оптимізації x_1 і x_2 є витрати відповідно збирача і спінювача. Цільова функція – вилучення горючої маси у концентрат ε . Інтервали зміни витрати збирача і спінювача складають відповідно 200 г/т і 10 г/т. Центр плану – $x_1 = 1000$ г/т і $x_2 = 50$ г/т.

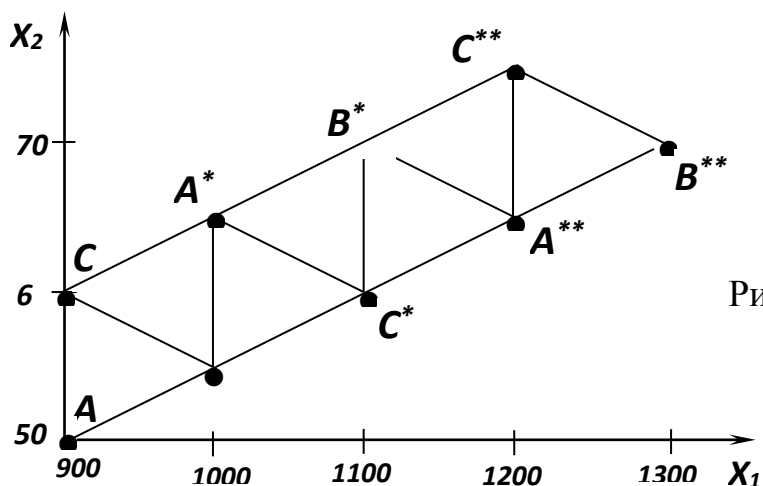


Рисунок 3.11 – Схема руху симплекса.

Після реалізації експериментів у точках A , B , C вихідного симплексу, тобто з умовами, які задані координатами цих точок, очевидно, що найгірший технологічний результат $\varepsilon_1 = 80\%$ отримано у точці A , при цьому результати у точках відрізняються. На наступному кроці застосована операція відображення координат точки A .

Координати нової точки експерименту A^* розраховують за формулою (3.96):

$$x_1^{A^*} = \frac{2(0 - 0,5)}{2} - (-0,5) = 0; \quad x_2^{A^*} = \frac{2(0,5 + 1)}{2} - 0 = 1,5.$$

Таблиця 3.23 – Застосування симплекс-методу для оптимізації флотації вугілля

№ дослід у	Симплекс		Витрата				Вилучення ε, %
	вихідний	вершина	збирача		спінювача		
			У код. од.	г/т			
1	ABC	A	− 0,5	900	0,0	50	80
2	ABC	B	0,0	1000	0,5	55	83
3	ABC	C	− 0,5	900	1,0	60	82
4	ABC	A*	0,0	1000	1,5	65	86
5	A*BC	C*	1,5	1100	1,0	60	89
6	A*BC*	B*	1,5	1100	2,0	70	91
7	A*B*C*	A**	2,0	1200	1,5	65	93
8	A**B*C*	C**	2,0	1200	2,5	75	92
9	A**B*C**	B**	2,5	1300	2,0	70	91

У наступному симплексі з вершинами A^* , B , C найгірший результат у точці B , для цього симплексу за тією же формулою (3.96) визначають

координати точки $C^*(x_1^{C^*} = 1,5; x_2^{C^*} = 1)$. Таким же чином визначають і інші точки симплекс-методу.

Результат дослід у вершині A^{**} : $\varepsilon = 93$. Продовження дослідження показує, що приросту функції ε практично немає. Можна зробити висновок, що симплекс досяг екстремальної області. Продовження пошуку призводить до «обертання» симплекса. Приймаємо координати максимуму: витрати збирача $X_1 = 1200$ г/т, витрати спінювача $X_2 = 65$ г/т, при цьому вилучення складає $\varepsilon = 93$ %.

Якщо досліджувати вихідну модель на максимум, наприклад, за допомогою часткових похідних, то одержимо координати екстремуму, що мало відрізняються від знайдених симплекс-методом. Деяка розбіжність у результатах пов'язана з кінцевими розмірами симплекса, але якщо прийняти його меншим (зменшити кроки варіювання), точність підвищиться.

3.2.2.8 Ротатабельне центрально-композиційне планування експериментів

Для одержання статистичної моделі при плануванні експерименту в області оптимальних значень параметрів необхідно детально вивчити функцію відгуку [5, 8]. З цією метою її звичайно задають у вигляді полінома другого, а іноді й більшого ступеня. На основі поліноміальної моделі можна вирішувати різні задачі:

- інтерполяційні – прогнозування значення функції відгуку у середині досліджуваного факторного простору у будь-якій його точці;
- екстраполяційні – прогнозування функції відгуку для точки, розташованої поза факторним простором;
- оптимізаційні – визначення оптимальних значень параметрів на основі максимізації або мінімізації цільової функції.

Поліноміальна модель дозволяє оцінити ступінь впливу на функцію відгуку різних факторів, мінімізувати ресурси і побудувати різні графіки і діаграми. Математична модель майже стаціонарної області допомагає образно представити і досліджувати більш точно екстремальну поверхню відгуку. У більшості випадків екстремальну область можна описати поліномами другого порядку.

Розглянуте раніше факторне планування типу ПФЕ 2^n не дозволяє оцінити коефіцієнти при квадратичних членах моделі. Потрібно використовувати планування типу 3^n , але воно складне і потребує великого числа дослідів. Для досягнення цієї мети існує декілька методів планування експериментів – ортогональне центрально-композиційне, ротатабельне центрально-композиційне й ін. Останнє має більше переваг, тому що дозволяє одержати однакову точність моделі у всіх напрямках факторного простору. В основі цих методів лежить факторне планування типу ПФЕ 2^n , матриця якого доповнюється, так званими, «зоряними точками» (α) і нульовими (центральними) точками. Метод дозволяє одержати модель у вигляді:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2, \quad (3.98)$$

де b_0 – вільний член, b_i – коефіцієнти при лінійних членах, b_{ij} – коефіцієнти при взаємодіях, b_{ii} – коефіцієнти при квадратичних членах моделі, X_i – фактори.

Новий план експериментів розбивається як би на 2 частини, перша з яких (ПФЕ) дозволяє знайти коефіцієнти b_0 , b_j і b_{jj} , друга – при квадратичних членах.

Характеристика ротатабельного центрально-композиційного планування наведена у табл. 3.24.

Таблиця 3.24 – Характеристика ротатабельного центрально-композиційного планування

Число факторів	Число точок				α
	ПФЕ	зоряних	центральных	загальне	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,682
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Величина плеча зоряних точок розраховується за формулою:

$$\alpha = 2^{n/4},$$

де n – число факторів.

Центральний ротатабельний композиційний план другого порядку для трьох факторів наведений у табл. 3.25.

Таблиця 3.25 - Ротатабельний центрально-композиційний план для трьох факторів

Матриця планування			Матриця обчислення					
X ₁	X ₂	X ₃	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₃ ²	X ₁ X ₂	X ₁ X ₃	X ₂ X ₃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
+1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
-1	+1	-1	1	1	1	-1	1	-1
+1	+1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	+1	1	1	1	1	-1	-1
+1	-1	+1	1	1	1	-1	1	-1
-1	+1	+1	1	1	1	-1	-1	1
+1	+1	+1	1	1	1	1	1	1
-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

У першій частині матриці представлений план ПФЕ 2³, у другій – зоряні точки, а у третій частині – нульові центральні точки.

Розрахунок коефіцієнтів моделі виконується за формулами:

$$b_0 = 0,166(oy) - 0,057 \sum_{j=1}^n (jy), \quad (3.99)$$

$$b_j = 0,073(jy), \quad (3.100)$$

$$b_{jj} = 0,0625(jjy) + 0,0069 \sum_{j=1}^n (jjy) - 0,0568(oy), \quad (3.101)$$

$$b_{ju} = 0,125(juy), \quad (3.102)$$

де $(oy) = \sum_i y_i$; $(jjy) = \sum_i X_{ji}^2 y_i$; $(jy) = \sum_i X_{ji} y_i$; $(juy) = \sum_i X_{ji} X_{ui} y_i$.

Регресійний аналіз моделі здійснюється аналогічно плануванню ПФЕ 2^n , але дисперсії коефіцієнтів моделі розраховуються за іншими формулами:

$$b_0 = AN^{-1} \left\{ 2\lambda_1^2 [n+2] \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} \right\}; \quad (3.103)$$

$$b_i = \lambda_2 N^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} y_{\mu}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.104)$$

$$b_{ij} = \lambda_2^2 N^{-1} \lambda_1^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} x_{j\mu} y_{\mu}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j; \quad (3.105)$$

$$b_{ij} = AN^{-1} \left\{ \lambda_2^2 [(n+2)\lambda_1 - n] \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} + \right. \\ \left. + \lambda_2^2 (1 - \lambda_1) \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{\mu=1}^N y_{\mu} \right\}; \quad (3.106)$$

$$\lambda_1 = (2^{n-p} N)(2^{n-p} + 2\alpha^2)^2; \quad (3.107)$$

$$\lambda_2 = (2^{n-p} + 2\alpha^2)^{-1} N; \quad (3.108)$$

$$A = \{2\lambda_1 [(n+2)\lambda_1 - n]\}^{-1}. \quad (3.109)$$

Ротатабельне центрально-композиційне планування експериментів раціонально використовувати тільки за умови отримання однорідної дисперсії оцінки цільової функції.

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. АНАЛІТИЧНІ, КОМБІНОВАНІ І СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

4.1 Аналітичні і комбіновані методи моделювання

В основі аналітичних моделей технологічних процесів лежать фундаментальні закони енерго- і масопереносу, виражені у вигляді функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегрально-диференціальних, кінцево-різницевих і т.д.). Тому аналітичні моделі описують і розкривають сутність процесів і явищ, що протікають в досліджуваному об'єкті та визначають його властивості і поведінку.

Методи дослідження аналітичних моделей: аналітичні (отримують загальне рішення в явному вигляді і підставляють в нього значення граничних та початкових умов) і чисельні (загальні рішення в явному вигляді замінюються наближеними).

В якості прикладу аналітичних моделей можна назвати диференціальні рівняння. Фізичні процеси у загальному випадку можуть бути описані диференціальними рівняннями у часткових похідних. Для спрощення моделі об'єкт представляють у вигляді набору (системи) частин, які описуються функціями тільки однієї змінної – часу. При цьому задачі, що вирішуються у збагаченні корисних копалин, як правило, допускають лінеаризацію, яка спрощує моделі процесів – у такому випадку аналітична модель являє собою лінійне диференціальне рівняння.

Якщо технологічний процес має одну вхідну величину (вплив) $x(t)$ і одну вихідну величину $y(t)$, то лінійне диференціальне рівняння, що описує його властивості, має такий загальний вигляд:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x}{dt^m} \quad (4.1)$$

Рішення диференціальних рівнянь-моделей шукаються в замкнутому вигляді, у вигляді функціональних залежностей. Такі аналітичні моделі технологічних процесів зручні при аналізі сутності фізичних (хімічних) процесів, але пошук їх рішень буває вельми складним. Громіздкість аналітичних виразів суттєво зменшує їх застосування у інженерній практиці.

Тобто, при якісному аналізі процесів, компаративному (порівняльному) підході застосування аналітичних моделей більш виправдане, ніж у випадку необхідності отримання конкретних числових оцінок вихідних параметрів об'єкта.

Якщо окремі елементи моделі (наприклад, коефіцієнти у аналітичному рівнянні) отримані статистичними (емпіричними) методами, то відповідні моделі є *аналітично-емпіричними*. Аналітичні методи іноді поєднують з графічними, одержуючи таким чином *графоаналітичні моделі*.

Нижче при розгляді моделювання окремих процесів збагачення корисних копалин ми розглянемо їх аналітичні і комбіновані моделі.

4.2 Графічні методи моделювання

4.2.1 Факторні моделі

Застосування факторної моделі використовує прийом типу «чорний ящик» й ілюструється рис. 4.1.

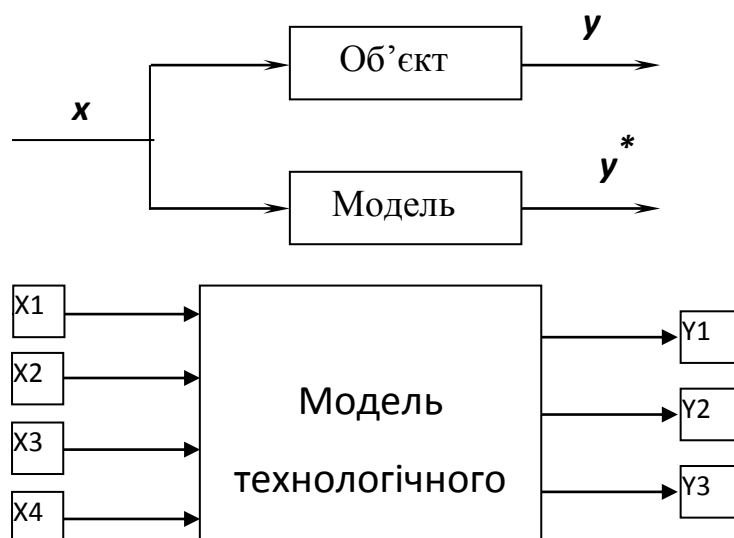


Рисунок 4.1 – Схема одержання моделі об'єкту:

X_n – входні фактори; Y_n – вихідні фактори

Вхідні X_n і вихідні Y_n параметри об'єкту встановлюють шляхом апріорної інформації, а також за допомогою попередніх експериментів. Задача моделювання полягає в тому, щоб значення y^* одержане на математичній моделі було близьким до реального значення y на виході об'єкту.

4.2.2 Феноменологічні моделі

Феноменологічний метод передбачає поділ технологічного процесу на субпроцеси. Такий прийом застосовується з метою спрощення і упорядкування процесу моделювання технологічного процесу. Кожен субпроцес вивчають окремо. Вихідні параметри попереднього субпроцесу є вхідними для наступного. Вихідні параметри останнього субпроцесу є вихідними для всього процесу.

Наприклад, феноменологічна схема пінної флотації відображає послідовність та взаємозв'язок всіх елементарних фізичних та хімічних процесів, які мають місце при проведенні технологічного процесу флотації (рис. 4.2): кондиціонування, аерації, елементарного акту флотації, спливання флотоагрегатів та формування пінного шару, вивантаження продуктів флотації.

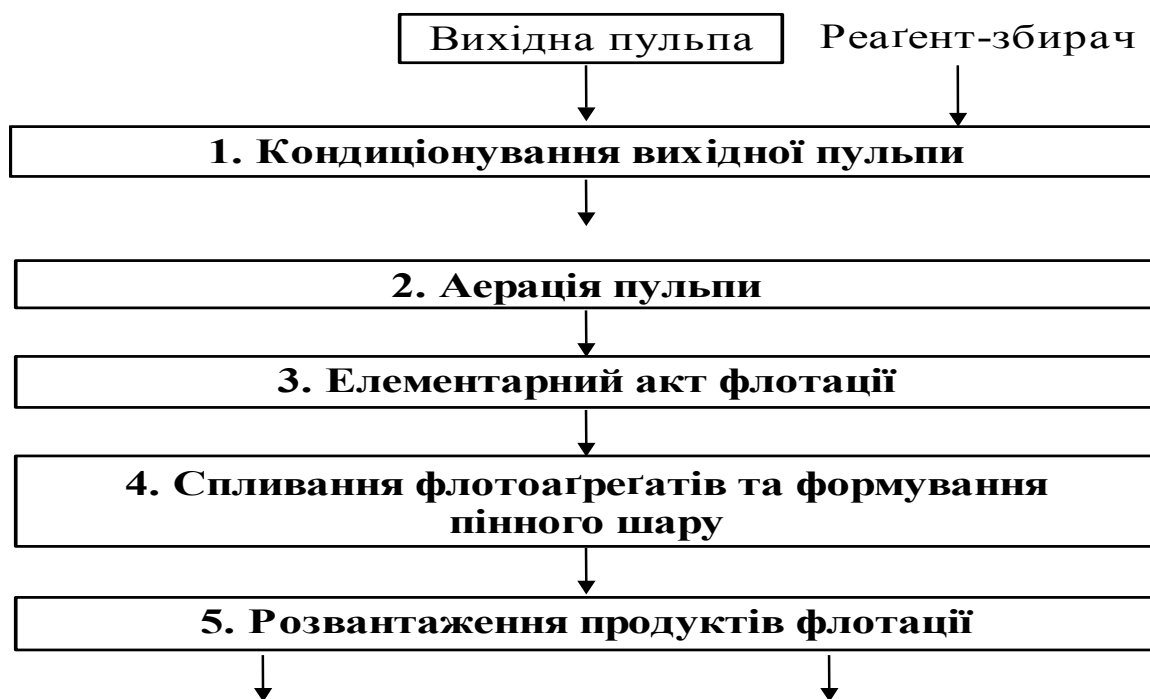


Рисунок 4.2 – Феноменологічна схема пінної флотації.

При застосуванні феноменологічного методу загальна модель процесу буде представлена сімейством рівнянь-моделей субпроцесів. Феноменологічна модель містить механізм для опису явища, але може бути тимчасовою, - вона уточнюється в ході вивчення процесу.

4.2.3 Моделі-графи

Розповсюджений у всіх галузях науки і техніки метод графічного зображення процесів, залежностей, структур і т.п. за допомогою точок та ліній, що їх з'єднують, привів до створення специфічних і звичних для спеціалістів кожної галузі графічних схем типу електричних, технологічних, пневматичних, гідравлічних і т.п. В математиці ці питання вирішуються в теорії графів, яка є топологічним відображенням теорії множин. Ця теорія може бути прикладена до будь-яких схематичних зображень процесів і служить загальним математичним інструментом для їх досліджень. В ряді випадків використання математичного апарату теорії графів дозволяє зробити деякі висновки і спрощення, які не настільки очевидні в звичайних схемах. В цьому сенсі доцільно використання мови теорії графів і переклад на них технологічних схем і залежностей, що розглядаються в збагаченні корисних копалин.

Графом називається сукупність об'єктів (вузлів) і зв'язків (дуг і ребер), що їх з'єднують. Тим самим дається уявлення про структуру об'єкту, що досліджується, встановлюються зв'язки між його окремими вузлами, а якщо ввести для ребер відповідну масову характеристику, можна одержати й кількісну оцінку зв'язків.

Технологічні схеми переробки корисних копалин можуть бути представлені у вигляді станів сукупності зерен, що послідовно змінюються. Сукупність зерен в кожному стані – корисної копалини в родовищі, дробленої, подрібненої, класифікованої за крупністю, розділеної за фізичними властивостями – характеризуються визначеними параметрами, як множина (вузол графа), обмежена граничними значеннями параметрів. Перехід з одного стану в інший може бути представлений спрямованими графами, вершини яких позначають відповідний стан, а ребра – процеси переходу в новий стан.

В процесах дроблення і подрібнення, коли весь матеріал переходить в один продукт іншого стану граф має одно ребро.

При класифікації і розділенні за фізичними властивостями процес характеризується багатореберним (за числом одержаних продуктів) графом (рис. 4.3). Вершини і ребра можуть бути пофарбовані різними кольорами у відповідності з прийнятими позначеннями: такий хроматичний граф містить підграфи різного кольору.

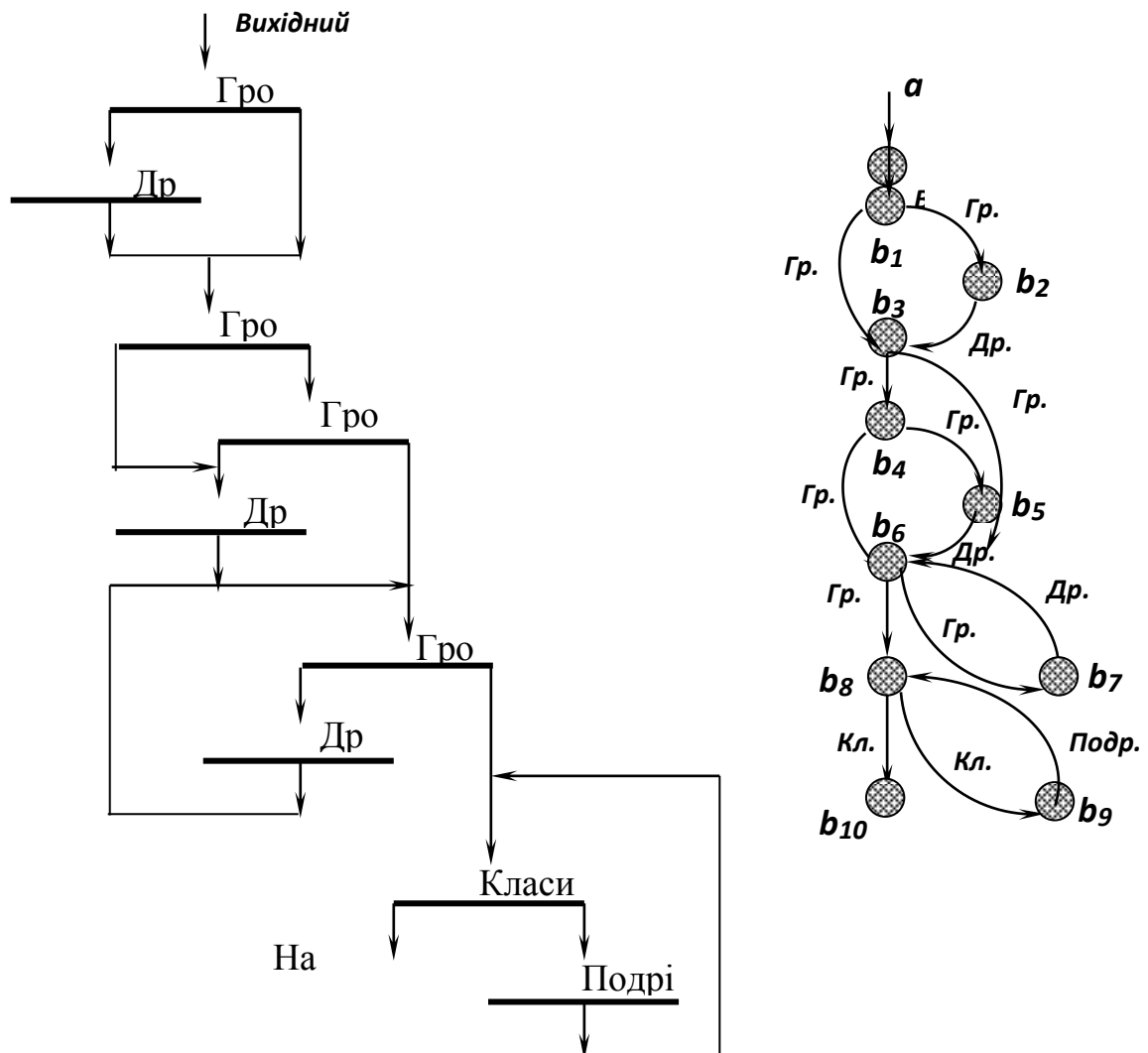


Рисунок 4.3 – Схема технологічного процесу і його модель-граф. b_i – стан матеріалу; Гр. – грохочення; Др. – дроблення; Кл. – класифікація; Подр. – подрібнення.

У нашому випадку маємо справу з орієнтованим графом (графом, у якого ребра мають напрямок).

Теорія графів для дослідження технологічних процесів дозволяє більш глибоко оцінити структуру процесу. При порівнянні двох або декількох технологічних схем, що призначені для переробки одного й того ж матеріалу з одержанням тих же кінцевих продуктів, порівняння графів дає можливість вибрати найбільш короткий і, отже, найбільш економічний процес з меншим числом операцій. На графі чітко виділяються цикли операцій над окремими проміжними продуктами. Наявність таких циклів вказує на існування продуктів, що циркулюють або накопичуються в процесі, і для яких необхідно знайти точку виводу.

Моделювання за допомогою графів не обмежується аналізом технологічних схем, а дозволяє при використанні статистичних даних виділити значимі фактори, що впливають на процес, визначити мінімальний набір критеріїв оптимізації і іншу інформацію.

4.3 Спеціальні методи моделювання

До спеціальних можна віднести методи моделювання процесів збагачення корисних копалин, які мають обмежене застосування – для специфічної сировини, при попередньому моделюванні, у спеціальних умовах – зокрема моделювання на основі елементів прогнозування, евристичне моделювання, адаптаційне моделювання. Сюди ж примикають метод розмірностей та метод аналогій, описані в розділі 2.

4.3.1 Моделювання на основі елементів прогнозування

Іноді раціональне рішення інженерної задачі ґрунтується на результатах, які на момент прийняття рішення ще невідомі або знаходяться в недосліджуваному діапазоні значень аргументів. Виникає необхідність прогнозувати результати за тими даними, що вже є [2, 5].

Екстраполяція результатів

Екстраполяція результатів застосовується, якщо бажано знати значення функції $y(x^*)$, аргумент якої x^* лежить поза досліджуваним діапазоном. Екстраполяція оснований на апроксимації існуючих даних тією або іншою залежністю і розрахунку за нею значення функції в потрібній області значень аргумента. Вона здійснюється найчастіше з використанням поліномів першого і другого ступенів. Чим далі знаходиться область, яка екстраполюється, тим більше імовірність похибки.

Найпростіше виконувати екстраполявання для функції одного аргумента. У цьому випадку прогноз здійснюється таким чином:

- за відомими значеннями x і y будується графік і по кривій вибирають порядок полінома. Для спрощення наступних розрахунків змінні краще центрувати відносно постійної складової;

- для явно лінійної залежності $y = b_0 + b_1 x$ по останніх двох точках знаходять параметри прямої b_0 і b_1 за формулами:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{n \sum xy - \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ b_0 &= \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

- для нелінійної залежності використовують поліном другого ступеня, вибирають три останні точки і сумісним вирішенням системи рівнянь (4.3) знаходять коефіцієнти b_0 , b_1 і b_2 :

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= y_1 - b_1 x_1 - b_2 x_1^2 \\ b_0 &= y_2 - b_1 x_2 - b_2 x_2^2 \\ b_0 &= y_3 - b_1 x_3 - b_2 x_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

- підставляють в отримане рівняння значення x^* і знаходять yx^* ;
- якщо спостерігається розкид точок, визначати параметри полінома по трьох останніх точках не можна і слід використовувати метод найменших квадратів.

Приклад 4.1. Якість мідної руди, що надходить на збагачувальну фабрику щорічно знижується. Вміст міді в руді за 2000 - 2008 роки наведено в табл. 3.26. Необхідно розрахувати прогнозовану якість руди у 2010 році.

Таблиця 4.1 – Вміст міді в руді за 2000 - 2008 роки

Рік	2000	2002	2004	2006	2008
α_{Cu} , %	1,50	1,46	1,42	1,34	1,20

За існуючими даними будемо графік залежності вмісту міді в руді від року надходження її на збагачувальну фабрику (рис. 4.4).

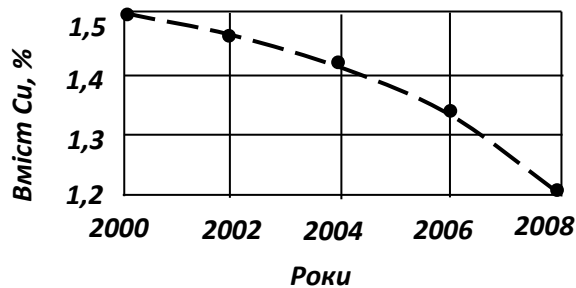


Рис. 4.4 – Графік залежності вмісту міді в руді від року надходження її на збагачувальну фабрику.

Графічна залежність показує явно нелінійне зниження якості руди, тому для екстраполяції застосовуємо поліном другого ступеню.

Центруємо значення аргументу; за точку відліку приймаємо 2000 рік; якість центруємо відносно 1,00 %. Дані для розрахунку коефіцієнтів b_0 , b_1 і b_2 полінома представлені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Дані для розрахунку коефіцієнтів b_0 , b_1 і b_2

Аргумент	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$	$x_4 = 6$	$x_5 = 8$
Функція	$y_1 = 0,50$	$y_2 = 0,46$	$y_3 = 0,42$	$y_4 = 0,34$	$y_5 = 0,20$

Відбираємо три останні точки і за формулою (4.3) знаходимо:

$$b_0 = 1,00; \quad b_1 = -0,115; \quad b_2 = -0,0075.$$

Екстраполяційний поліном буде мати вигляд:

$$\alpha_{Cu} = 3,00 - 0,115 \cdot (x - 2000) - 0,0075 \cdot (x - 2000)^2.$$

Підставляємо у поліном прогнозуємий рік – 2010 і знаходимо:

$$\alpha_{Cu}^{2010} = 3,00 - 0,115 \cdot (2010 - 2000) - 0,0075 \cdot (2010 - 2000)^2 = 1,10\%.$$

Інтерполяція результатів

Інтерполяційні формули дозволяють розрахувати значення функції при значенні аргументу, який знаходиться всередині досліджуваного інтервалу. Наприклад, при значенні аргументу x_0 , x_1 , x_2 , ..., x_i , ..., x_n

відомо значення функції $y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$. Необхідно визначити величину функції y^* при $x = x^*$, якщо x^* лежить в діапазоні $x_0 \leq x^* \leq x_n$. Для рішення таких задач існує багато інтерполяційних формул. Найбільш зручна для технічних розрахунків інтерполяційна формула Лагранжа, тому що вона не накладає обмежень на інтервал зміни x . Інтерполяція полягає в тому, що експериментальні точки апроксимуються поліномом. У загальному вигляді формула Лагранжа має вигляд:

$$y(x^*) = \sum y_i \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \dots (x^* - x_{i-1})(x^* - x_{i+1}) \dots (x^* - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (4.4)$$

Для двох точок $x_1 = a$ і $x_2 = b$ рівняння буде:

$$y(x^*) = \frac{x^* - b}{a - b} y_a + \frac{x^* - a}{b - a} y_b. \quad (4.5)$$

Для трьох точок $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$:

$$y(x^*) = \frac{(x^* - b)(x^* - c)}{(a - b)(a - c)} y_a + \frac{(x^* - a)(x^* - c)}{(b - a)(b - c)} y_b + \frac{(x^* - a)(x^* - b)}{(c - a)(c - b)} y_c. \quad (4.6)$$

Приклад 4.2. При флотації вугільних шламів як збирач використовували дизельне паливо з витратами (q) 1,2, 1,6 і 2,0 кг/т, при цьому ступінь вилучення (ε) вугільних частинок в концентрат складає відповідно 60, 70 і 84 %. Необхідно визначити чому буде дорівнювати ступінь вилучення при витраті збирача 1,8 кг/т.

Результат отримуємо з використанням формули (4.6):

$$\begin{aligned} \varepsilon(q) &= \frac{(1,8 - 1,6)(1,8 - 2,0)}{(1,2 - 1,6)(1,2 - 2,0)} \cdot 60 + \frac{(1,8 - 1,2)(1,8 - 2,0)}{(1,6 - 1,2)(1,6 - 2,0)} \cdot 70 + \\ &+ \frac{(1,8 - 1,2)(1,8 - 1,6)}{(2,0 - 1,2)(2,0 - 1,6)} \cdot 84 = 76,5 \% \end{aligned}$$

Тобто при витраті збирача (дизельне паливо) $q = 1,8$ кг/т ступінь вилучення вугільних частинок в концентрат буде складати $\varepsilon = 76,5$ %.

4.3.2 Евристичне моделювання

Евристичні моделі отримують шляхом формалізації моделей процесів, що сформувалися у робочого або інженера, який веде процес, але звичайно не відтворені ними в необхідній узагальненій формі. В результаті одержання інформації про процес, що безперервно надходить, численних проб і особистих спостережень, людина, яка безпосередньо веде процес, володіє дуже стійкою і визначеною моделлю конкретного процесу [2].

Метою евристичного моделювання є така оцінка ефектів факторів, яка дозволяє в кількісній формі записати модель. У цьому сенсі дуже зручною є форма бесіди у вигляді уявного експерименту.

Однак робочому важко оцінити одразу вплив декількох факторів, тому опитування виконується послідовно по кожному фактору. Результати опитування заносять у спеціальну таблицю і після обробки отриманих даних розраховують модель процесу. Суть методу пояснюється на прикладі.

Приклад 4.3. На вуглезбагачувальній фабриці проводилося багаторазове опитування флотаторів про вплив на процес флотації при відхиленні від нормального (середнього) значення таких факторів: витрата збирача (фактор x_1), витрата спінювача (фактор x_2), температура пульпи (фактор x_3), густина пульпи (фактор x_4).

Середні значення факторів і відхилення від них наведені в табл. 4.3.

Процес флотації оцінювався по вилученню горючої маси в концентрат ϵ і його зольності A .

Таблиця 4.3 – Середні значення факторів і відхилення

Фактор	Позначення фактора (нульовий рівень)	Відхилення фактора	
		збільшення	зменшення
Витрата збирача	$x_1 = 1,3 \text{ кг/т}$	$+ \Delta x_1 = 0,1 \text{ кг/т}$	$- \Delta x_1 = -0,1 \text{ кг/т}$
Витрата спінювача	$x_2 = 0,04 \text{ кг/т}$	$+ \Delta x_2 = 0,01 \text{ кг/т}$	$- \Delta x_2 = -0,01 \text{ кг/т}$
Температура пульпи	$x_3 = 20^\circ\text{C}$	$+ \Delta x_3 = 5^\circ\text{C}$	$- \Delta x_3 = -5^\circ\text{C}$
Густина пульпи	$x_4 = 120 \text{ кг/м}^3$	$+ \Delta x_4 = 20 \text{ кг/м}^3$	$- \Delta x_4 = -20 \text{ кг/м}^3$

Результати опитування занесені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Результати опитування (анкета для отримання моделі процесу)

№ питання	Значення факторів (питання)				Значення вихідних показників (відповіді)	
	x_1	x_2	x_3	x_4	ε	A
0	$x_{10} = 1,3$	$x_{20} = 0,04$	$x_{30} = 20$	$x_{40} = 120$	$\varepsilon_0 = 85$	$A_0 = 9,0$
1	$+\Delta x_1 = 0,1$	0	0	0	$\Delta \varepsilon_1 = 3$	$\Delta A_1 = 0,3$
2	$-\Delta x_1 = -0,1$	0	0	0	$\Delta \varepsilon_2 = -5$	$\Delta A_2 = -$
3	0	$+\Delta x_2 =$	0	0	$\Delta \varepsilon_3 = 2$	0,4
4	0	0,01	0	0	$\Delta \varepsilon_4 = -3$	$\Delta A_3 = 0,2$
5	0	$-\Delta x_2 =$	$+\Delta x_3 =$	0	$\Delta \varepsilon_5 = 3$	$\Delta A_4 = -$
6	0	0,01	5	0	$\Delta \varepsilon_6 = -6$	0,2
7	0	0	$-\Delta x_3 =$	$+\Delta x_4 =$	$\Delta \varepsilon_7 = -4$	$\Delta A_5 = 0,4$
8	0	0	-5	20	$\Delta \varepsilon_8 = 1$	$\Delta A_6 = -$
		0	0	$-\Delta x_4 = -$		0,5
		0	0	20		$\Delta A_7 = -$
						0,3
						$\Delta A_8 = 0,1$

Коефіцієнти нелінійної моделі можна отримати, якщо вирішити системи рівнянь відносно вилучення і зольності:

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_{2j-1} = a_j \Delta x_j + a_{jj} \Delta x_j^2 \\ \Delta \varepsilon_{2j} = a_j (-\Delta x_j) + a_{jj} (-\Delta x_j)^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \Delta A_{2j-1} = b_j \Delta x_j + b_{jj} \Delta x_j^2 \\ \Delta A_{2j} = b_j (-\Delta x_j) + b_{jj} (-\Delta x_j)^2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Відхилення вилучення і зольності визначаються як різниця між середнім значенням фактора ($\varepsilon_0 = 85 \%$ і $A_0^d = 9 \%$) і значенням, отриманим в результаті відповіді робочого на конкретне питання про вплив відхилення фактора на процес.

Отримання коефіцієнтів моделі розглянемо на прикладі врахування впливу витрати збирача:

– на вилучення горючої маси у флотоконцентрат:

$$\begin{cases} 3 = a_1 \cdot 0,1 + a_{11} \cdot 0,1^2 \\ -5 = a_1 \cdot (-0,1) + a_{11} \cdot (-0,1)^2 \end{cases}$$

В результаті вирішення системи рівнянь одержуємо коефіцієнти $a_1 = 40$, $a_{11} = -100$ і модель відносно впливу витрати збирача

$$\varepsilon = 85 + 40 \cdot \Delta x_1 - 100 \cdot \Delta x_1^2;$$

– на зольність флотоконцентрату:

$$\begin{cases} 0,3 = b_1 \cdot 0,1 + b_{11} \cdot 0,1^2 \\ -0,4 = b_1 \cdot (-0,1) + b_{11} \cdot (-0,1)^2 \end{cases}$$

В результаті вирішення системи рівнянь одержуємо коефіцієнти $b_1 = 3,5$, $b_{11} = -5$ і модель відносно впливу витрати збирача:

$$\beta = 9 + 3,5 \cdot \Delta x_1 - 5 \cdot \Delta x_1^2.$$

Аналогічно визначають вплив інших факторів і записують модель процесу із урахуванням усіх факторів, для даного прикладу вона буде:

вилучення горючої маси у флотоконцентрат:

$$\varepsilon = 85 + 40 \cdot \Delta x_1 - 100 \cdot \Delta x_1^2 + 250 \cdot \Delta x_2 - 5000 \cdot \Delta x_2^2 + 0,9 \cdot \Delta x_3 - 0,06 \cdot \Delta x_3^2 + 0,125 \cdot \Delta x_4 - 0,00025 \cdot \Delta x_4^2;$$

зольність флотоконцентрату:

$$A^d = 9 + 3,5 \cdot \Delta x_1 - 5 \cdot \Delta x_1^2 + 20 \cdot \Delta x_2 + 0,09 \cdot \Delta x_3 - 0,002 \cdot \Delta x_3^2 + 0,01 \cdot \Delta x_4 - 0,00025 \cdot \Delta x_4^2.$$

Першим результатом отримання таких моделей є узгодження досвіту і уявлень про процес. Узгодження моделей усіх робочих свідчить про однаковість знань про процес, при розбіжностях – можна з'ясувати їхню причину та покращити уявлення окремих робочих про процес. У подальшому модель можна використовувати для оптимізації процесу. Крім того евристичний метод дозволяє коротким і простим способом визначити квазіоптимальні режими і квазіоптимальні закономірності.

Отримання квазіоптимальних режимів полягає у тому, що вибирають робочих, які мають кращі результати ведення процесу, і приймають рекомендований ними середній режим. Звичайно це називається передачею передового досвіту.

Квазіоптимальні режими для різних умов, представлені рівняннями називаються квазіоптимальними закономірностями. Для цього виділяють серед вхідних факторів керовані (позначимо їх z), і некеровані (позначимо їх x). Слід узгодити з робочими однакове поняття найкращих показників і сформулювати цільову функцію: наприклад, під найкращими розуміти режими, які забезпечують в даних умовах максимальне вилучення і необхідну якість концентрату. Визначити нормальні (середні) значення збурюючих факторів (некерованих) і значення керованих факторів, необхідні для досягнення кращих результатів (z_{10} , z_{20} , z_{30}). Зазначити необхідне відхилення керованих факторів, що забезпечують найкращі показники процесу:

– якщо тільки один фактор x_1 відхилиться від нормального режиму на $+\Delta x_1$ (Δx_{11} , Δx_{21} , Δx_{31});

– якщо тільки один фактор x_1 відхилиться від нормального режиму на $-\Delta x_1$ (Δx_{11} , Δx_{21} , Δx_{31});

– і далі по кожному некерованому фактору.

Якщо вирішити систему аналогічну (4.7) – (4.8):

$$\begin{cases} z_1 = z_{10} + c_{11}\Delta x_1 + c_{111}\Delta x_1^2 + \dots + c_{p1}\Delta x_p + c_{pp1}\Delta x_p^2; \\ z_2 = z_{20} + c_{12}\Delta x_1 + c_{112}\Delta x_1^2 + \dots + c_{p2}\Delta x_p + c_{pp2}\Delta x_p^2; \\ z_3 = z_{30} + c_{13}\Delta x_1 + c_{113}\Delta x_1^2 + \dots + c_{p3}\Delta x_p + c_{pp3}\Delta x_p^2, \end{cases} \quad (4.9)$$

отримують систему квазіоптимальних закономірностей-моделей, яку можна рекомендувати для використання.

Приклад 4.4. Отримати евристичну модель кульового млина при таких вхідних даних: крупність руди $G = 15$ мм, частка руди другого сорту $P = 30\%$, продуктивність млина $Q = 20$ т/год., витрати води $V =$

40 м³/год. Вихідна величина – вміст готового продукту (клас – 0,074 мм) в зливі класифікатора $\beta = 60\%$ при максимальній продуктивності млина.

Результати опитування заносимо в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Результати опитування

№ запит	Запитання до робочих				Відповіді робочих				Середні значення
	G	P	Q	V	$\Delta\beta_1$	$\Delta\beta_2$	$\Delta\beta_3$	$\Delta\beta_4$	$\bar{\beta}, \Delta\bar{\beta}$
0	15	30	20	40	–	–	–	–	60
1	+2	–	–	–	–6	–4,5	–4	–5,5	–5
2	–2	–	–	–	+8	+11	+12	+9	+10
3	–	+10	–	–	+4,5	+3,5	+4,5	+3,5	+3
4	–	–10	–	–	–3	–4	–3	–2	–3
5	–	–	+3	–	–12	–8	–10	–10	–10
6	–	–	–3	–	+4	+1	+2	+5	+3
7	–	–	–	+5	+2	+2	+2	+2	+2
8	–	–	–	–5	–5	–6	–4	–5	–5
$Q \rightarrow \max; \beta_{-0,074} = 60\%$									

Коефіцієнти рівняння моделі отримують при вирішенні системи рівнянь відносно кожного з факторів (див. приклад 2.22). Для даного прикладу аналітичний запис моделі має вигляд:

$$\beta_i = 60 - 3,75 \cdot (G - 15) + 0,625 \cdot (G - 15)^2 + 0,3 \cdot (P - 30) - 2,33 \cdot (Q - 20) - 0,388 \cdot (Q - 20)^2 + 0,7 \cdot (V - 40) - 0,06 \cdot (V - 40)^2,$$

де β_{Π} – прогнозне значення вихідної величини.

4.3.3 Адаптаційне моделювання

Адаптаційні методи дозволяють для отримання моделі використовувати дані одразу ж без їхнього накопичення. Це важливо, по-перше, у випадку отримання і обробки великої кількості даних і, по-друге, що головніше, модель можна використовувати в процесі її отримання. Цей

випадок найбільш яскраво виявляється в умовах безперервного використання результатів спостереження за процесом для покращення моделі [2].

Частково ця ідея відбивається в схемах так званого «поточного» аналізу, який полягає у тому, що регресійну модель на кожному черговому кроці спостереження отримують заново зрушенням використаного масиву даних на один номер і розташуванням на звільненому місці результату нових спостережень. У цьому випадку повністю зберігається схема регресійного аналізу, яка доповнюється тільки ідеєю перерахунку моделі. Адаптаційний метод дозволяє перераховувати модель за даними одного-єдиного, останнього спостереження. Метод дає добрі результати для лінійних моделей.

Адаптаційний метод належить до «пасивних», тому усі методичні вказівки про збір даних повністю відносяться до цього методу. Однак цей метод можна використовувати також і при активній зміні вхідних факторів.

Схема методу така.

Якщо існує модель для N -го спостереження, то після отримання $N + 1$ -го спостереження коефіцієнти змінюють за формулою:

$$a_{jN+1} = a_{jN} + (y_{N+1} - y_{N+1\text{прогн}}) / (\gamma + \sum_{j=0}^k x_{jN+1}^2), \quad (4.10)$$

$$y_{N+1\text{прогн}} = a_{0N} + a_{1N}x_{N+1}, \quad (4.11)$$

де N – номер спостереження; γ – деяке число, яке враховує вплив перешкод (чим більше перешкоди, тим більше γ); k – число коефіцієнтів в рівнянні (включаючи a_0).

Достатньо добрі результати дає використання спрощених формул, де для корекції використовується коефіцієнт $b = 2/k$ при низькому рівні перешкод, який знижується по відношенню до цієї величини при підвищенні рівня перешкод:

$$a_{jN+1} = a_{jN} + bx_{jN}(y_{N+1} - y_{N+1\text{прогн}}), \quad (4.12)$$

тобто

$$a_{jN+1} = bx_{jN+1}\Delta y_{N+1}. \quad (4.13)$$

При цьому значення x_j необхідно використовувати у відносній формі:

$$x_j = (x_{jn} - x_{jn0}) / (x_{jn\max} - x_{jn0}), \quad (4.14)$$

де x_{jn} – природне значення x_j ; $x_{jn\max}$ – максимальне природне значення; x_j, x_{jn0} – нульове природне значення x_j .

Для отримання 10 %-ної точності моделі на кожний коефіцієнт моделі необхідно по 10 спостережень у випадку нормального розподілу x . Завжди приймається $x_0 = 1$.

Приклад 4.5. В результаті лабораторних досліджень процесу вилуговування припускалося, що вилучення нікелю залежить від витрати кислоти таким чином: $\varepsilon = 65 + 0,1q_n$, де q – витрата кислоти, кг/т.

При спостереженнях за промисловим процесом був застосований адаптаційний метод покращення моделі.

Відомо, що витрати кислоти складають в середньому 230 кг/т і можуть досягати 280 кг/т, тому використовували відносні значення:

$$q = (q_n - 230) / (280 - 230) = (q_n - 230) / 50.$$

Модель в відносних одиницях q буде отримана, якщо підставити $q_n = 50q + 230$, тоді

$$\varepsilon = 65 + 0,1(50q + 230) = 88 + 5q.$$

Результати спостережень за процесом наведені в табл. 4.6. На момент часу t_0 , тобто при $N = 0$ відомі тільки коефіцієнти $a_0 = 88$ і $a_1 = 5$.

При отриманні перших даних $q_n = 260$ або $q = 0,6$ і $\varepsilon = 94$ прогнозуємо за існуючою моделлю $\varepsilon_{\text{прогн}}$

$$\varepsilon_{\text{прогн}} = 88 + 5 \cdot 0,6 = 91.$$

Знаходимо $\Delta\varepsilon_{\text{прогн}} = 3$.

Оскільки $k = 2$ для визначення прирощених коефіцієнтів використовуємо формулу:

$$\Delta a_{jN} = x_{jN+1} \Delta y_{N+1}.$$

При $N = 1$ $\Delta a_{01} = 1 \cdot 3 = 3$; $\Delta a_{11} = 0,6 \cdot 3 = 1,8$, звідки $a_{01} = 88 + 3 = 91$; $a_{11} = 5 + 1,8 = 6,8$.

Таким чином, після отримання і використання першої пари даних маємо модель:

$$\varepsilon = 91 + 6,8q.$$

Отримуємо і використовуємо другу пару даних:

$$\varepsilon_{\text{прогн}_2} = 91 + 6,8 \cdot (-0,6) = 86,92;$$

$$\Delta a_{02} = 1 \cdot (-0,92) = -0,92;$$

$$\Delta a_{12} = -0,6 \cdot (-0,92) = 0,55;$$

$$a_{02} = 91 - 0,92 = 90,08;$$

$$a_{12} = 6,8 + 0,55 = 7,35;$$

$$\varepsilon = 90,08 + 7,35q \text{ і т.д.}$$

Таблиця 4.6 – Результати спостережень і розрахунків моделі

№ досліду	q_n	q	ε	$\varepsilon_{\text{прогн}}$	$\Delta \varepsilon_{\text{прогн}}$	Δa_0	Δa_1	a_0	a_1
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	260	0,6	94	91,00	3,00	3,00	1,80	91,00	6,80
2	200	-0,6	86	86,92	-0,92	-0,92	0,55	90,08	7,35
3	220	-0,2	89	88,61	0,39	0,39	-0,08	90,47	7,27
4	280	1,0	96	97,74	-1,74	-1,74	-1,74	88,73	5,53
5	230	0	90	88,73	1,27	1,27	0	90,00	5,53
6	190	-0,8	85	85,58	-0,58	-0,58	0,47	89,42	6,00
7	200	-0,6	85	85,82	-0,82	-0,82	0,49	88,60	6,49
8	270	0,8	95	93,80	1,20	1,20	0,96	89,80	7,45
9	210	-0,4	88	86,80	1,20	1,20	-0,48	91,00	6,97
10	220	-0,2	88	89,60	-1,60	-1,60	0,32	89,40	7,29
11	190	-0,8	85	83,60	1,40	1,40	-1,12	90,80	6,17
12	240	0,2	91	92,00	-1,00	-1,00	-0,20	89,80	5,97
13	270	0,8	94	94,60	-0,60	-0,60	-0,48	89,20	5,49
14	280	1,0	95	94,79	0,21	0,21	0,21	89,40	5,70
15	240	0,2	92	90,50	1,50	1,50	0,30	90,90	6,00
16	220	-0,2	88	89,70	-1,70	-1,70	-0,34	89,20	5,66
17	200	-0,6	85	85,80	-0,80	-0,80	0,48	88,40	6,14
18	260	0,6	93	92,10	0,90	0,90	0,54	89,30	6,68

Оскільки на результати ε впливають переешкоди, то ні a_0 , ні a_1 не прямують до постійного значення, а коливаються навколо деякого «справжнього» значення – в прикладі для $a_0 = 90$ і для $a_1 = 6$. Рівень переешкод – високий, тому коефіцієнт b слід брати не $b = 2/k$, а менше і продовжити спостереження.

4.4 Сепараційні характеристики збагачувальних процесів як математичні моделі

Сепараційна характеристика технологічної операції або схеми збагачення являє собою безперервну функцію $\varepsilon_K(\xi)$, яка показує залежність вилучення елементарних фракцій $[\xi, \xi + d\xi]$ в концентрат від фізичної властивості ξ . Сепараційну характеристику $\varepsilon_K(\xi)$ також називають функцією розділення, головною технологічною характеристикою сепаратора (або схеми), кривою вилучення фракцій у концентрат та ін.

Так як $\varepsilon_K(\xi)$ являє собою інтегральну характеристику процесу, то вона по суті може використовуватися як його математична модель.

Сепараційна характеристика для відходів $\varepsilon_{\text{відх}}(\xi)$ визначається із $\varepsilon_K(\xi)$ з використанням формули:

$$\varepsilon_K(\xi) + \varepsilon_{\text{відх}}(\xi) = 1. \quad (4.15)$$

Завдяки цьому рівнянню необхідно мати інформацію тільки про одну зі складових $\varepsilon_K(\xi)$ або $\varepsilon_{\text{відх}}(\xi)$.

Вилучення кінцевої фракції $[\xi_i; \xi_{i+1}]$ або $[\xi_i; \xi_i + \Delta\xi_i]$ у концентрат окремої операції або схеми збагачення дорівнює відношенню маси (продуктивності по твердому) цієї фракції у концентраті і G_{iK} у живленні $G_{iЖ}$:

$$\bar{\varepsilon}_{iK} = \frac{G_{iK}}{G_{iЖ}} = \frac{Q_K \bar{\gamma}_{iK}}{Q_{Ж} \gamma_{iЖ}} = \frac{Q_K \gamma_K(\xi_i) \Delta\xi_i}{Q_{Ж} \gamma_{Ж}(\xi_i) \Delta\xi_i} \quad (4.16)$$

де Q_K і $Q_{жс}$ – повна продуктивність по твердому відповідно для концентрату і живлення, т/год.

У чисельнику формули (4.16) добуток Q_K і виходу фракції $\bar{\gamma}_{ik} = \gamma_K(\xi) \Delta \xi$ дає продуктивність цієї фракції для концентрату, а у знаменнику для живлення. Тут $\gamma_K(\xi)$ характеризує розподіл твердого по фракціях у концентраті, а $\gamma_{жс}(\xi)$ – у живленні.

При $\Delta \xi_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ отримують безперервну функцію – сепараційну характеристику:

$$\varepsilon_K(\xi) = \frac{Q_K \gamma_K(\xi_i) \Delta \xi_i}{Q_{жс} \gamma_{жс}(\xi_i) \Delta \xi_i} = \bar{\gamma}_K \frac{\gamma_K(\xi)}{\gamma_{жс}(\xi)}, \quad (4.17)$$

де $\bar{\gamma}_K = Q_K / Q_{жс}$ – вихід концентрату, частки од.

Ідеальна сепараційна характеристика має ступінчастий вигляд (рис. 4.5):

$$\varepsilon_{id}(\xi) = \bar{1}(\xi - \xi_p) = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi \succ \xi_p; \\ 0,5 & \text{для } \xi = \xi_p; \\ 0 & \text{для } \xi \prec \xi_p. \end{cases} \quad (4.18)$$

Тут для стислості застосований символ одиничної ступінчастої функції $\bar{1}(\xi - \xi_p)$, де константа ξ_p вказує точку, у якій відбувається стрибок на одиницю.

Неідеальні сепараційні характеристики при зміні від нуля і вище зростають між нулем і одиницею. Тут можливі різні криві у залежності від типу сепаратора або схеми. Реальні сепаратори, як правило, мають неідеальні сепараційні характеристики.

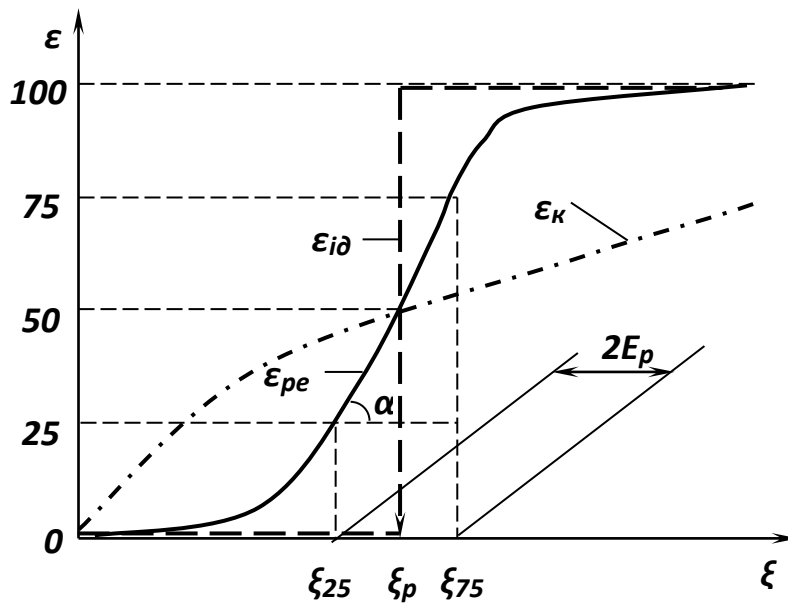


Рисунок 4.5 –
Сепараційні
характеристики.

Границя розділення $\xi_p = const$ відповідає елементарній фракції, яка наполовину вилучається у концентрат, наполовину у відходи. Координата границі ξ_p при відомому $\varepsilon_k(\xi)$ може бути розрахована за формулою:

$$\varepsilon_k(\xi) = 0,5. \quad (4.19)$$

В усіх сепараторах і схемах збагачення передбачена можливість зміни положення границі розділення у бажаному напрямку.

Крутизна сепараційної характеристики $tg \alpha = d\varepsilon_k(\xi) / d\xi \Big|_{\xi=\xi_p}$ у робочій точці, що відповідає границі розділення $\xi = \xi_p$, є однією з оцінок ступеня недосконалості сепарації для операції або схеми: чим більше крутизна, тим ближче сепараційна характеристика до ідеальної. Удосконалення сепаратора або схеми – це, у першу чергу, підвищення крутизни у робочій точці.

Два параметри: границя розділення ξ_p і крутизна у робочій зоні $tg \alpha = \varepsilon'_k(\xi_p)$ є головними параметрами сепараційної характеристики $\varepsilon_k(\xi)$. За цими параметрами можна приблизно оцінити функцію $\varepsilon_k(\xi)$ та одержати її графік.

Сепараційна характеристика будь-якого окремого сепаратора (або фрагмента схеми) може бути знайдена експериментальним, теоретичним або комбінованим шляхом.

Експериментальний метод вимагає виміру величин $Q_{вих}, Q_K, \gamma_{вих}(\xi), \gamma_K(\xi)$ і базується на рішенні рівнянь сепарації, які визначають фракційний склад матеріалу в будь-якій точці (x, y, z) робочої зони завдяки функції стану $\gamma(\xi, x, y, z, t)$. Одним з важливих їхніх застосувань є розрахунок сепараційних характеристик $\varepsilon(\xi)$ апаратів.

Типовий метод експериментального визначення сепараційної характеристики оснований на використанні формули (4.17):

- для працюючого сепаратора або схеми вимірюють продуктивності $Q_{ж}$ і Q_K для розрахунку $\bar{\gamma}_K = Q_K / Q_{ж}$;
- відбирають проби живлення і концентрату і виконують їх фракційний аналіз для визначення функцій розподілу $\gamma_{ж}(\xi)$ і $\gamma_K(\xi)$;
- виконують розрахунок сепараційної характеристики за формулою (4.17).

Для випадку ідеального збагачення (сепараційна характеристика має вигляд ступінчастого імпульсу) технологічні показники можна розрахувати, якщо фракційний склад сировини відомий:

$$\bar{\gamma}_K = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_p} \gamma_{вих}(\xi) d\xi ; \quad (4.20)$$

$$\bar{\beta}_K = \frac{1}{\gamma_K} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_p} \beta(\xi) \gamma_{вих}(\xi) d\xi. \quad (4.21)$$

При неідеальній сепарації у окремому апараті або по схемі збагачення у формули прогнозу технологічних показників вводять додаткову сепараційну характеристику:

$$\bar{\gamma}_K = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_K(\xi) \gamma_{вих}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_K(\xi_i) \gamma_{вих}(\xi_i) \Delta \xi_i; \quad (4.22)$$

$$\bar{\beta}_\kappa = \frac{1}{\gamma_\kappa} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_\kappa(\xi) \beta(\xi) \gamma_{\text{вих}}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_\kappa(\xi_i) \beta(\xi_i) \gamma_{\text{вих}}(\xi_i) \Delta \xi_i / \gamma_\kappa. \quad (4.23)$$

Основою *аналітичного методу* є закономірності масопереносу фракцій в сепараторах, які визначаються функціями: $\gamma(\xi, x, y, z, t)$ – функція розподілу по фракціям в локальній зоні сепарації x, y, z в момент часу t ; $\vec{v}(\xi, x, y, z, t)$ – осереднена швидкість частинок елементарної фракції $[\xi, \xi + d\xi]$. Ці дві функції необхідні і достатні для повного опису картини руху будь-якої елементарної фракції усередині апарата.

Вони визначаються двома рівняннями – збереження фракцій і балансу сил:

$$\partial \gamma / \partial t = -\text{div}(\gamma \vec{v}) + W; \quad (4.24)$$

$$\sum F_i = 0, \quad (4.25)$$

де $W = W(\xi, x, y, z, t)$ – потік фракції, який підводиться у зону або відводиться із зони.

Рішення рівнянь (4.24)-(4.25) дозволяє отримати шукані γ і \vec{v} .

Комбінований метод застосовують у зв'язку з тим, що теоретичні формули $\varepsilon(\xi)$ вимагають числової конкретизації (часто експериментальної) параметрів апарату, напр., тривалість флотації t_ϕ і ступінь аерації S – для флотомашини або параметри h, α_{onip}, D – для відсаджувальної машини. Крім того, в реальних експлуатаційних умовах параметри апаратів можуть змінюватись, але для проектних цілей достатньо усереднених даних.

Сепараційні характеристики основних збагачувальних апаратів показані в табл. 4.7.

Фракційний склад мінеральної сировини і сепараційні характеристики дозволяють прогнозувати технологічні результати збагачення (вихід, вміст, вилучення) будь-якої сировини за допомогою технологічної схеми. Оцінювати ефективність роботи і порівнювати збагачувальні апарати різних конструкцій, оцінювати і порівнювати самі складні технологічні схеми незалежно від типу сировини, що перероблюється, вирішувати задачі економічно оптимальної стратегії збагачення складної сировини, оптимально проектувати детальні технологічні схеми.

Таблиця. 4.7 – Сепараційні характеристики збагачувальних апаратів

Апарат і його режим	Сепараційна характеристика $\varepsilon_K(\xi)$	Границя розділення $\varepsilon_K(\xi_p) = 0,5$	Крутизна характеристики у точці розділення $\varepsilon'(\xi_p)$
Відсаджувальна машина з природною постіллю, суспензійний сепаратор з великим стисненням	$\varepsilon_K(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{gh\gamma_{вих}(\delta)}{\alpha D}} (\delta - \bar{\delta}) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\sqrt{\frac{gh}{2\pi\alpha D(\delta_{\max} - \delta_{\min})}}$
Відсаджувальна машина з штучною постіллю, суспензійний сепаратор з помірним стисненням	$\varepsilon_K(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th \left[\frac{gh}{4\alpha D} (\delta - \delta_p) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\frac{gh}{8\alpha D}$
Грохот	$\varepsilon_{верх}(d) = 1 - \exp \left[-\frac{V_c(d)M}{hQ_{вих}} \right]$	$d_p \approx d_0$	$\frac{MV_c(d_0)}{2hQ_{вих}}$
Гідрокласифікатор з висхідним потоком при нестиснених умовах	$\varepsilon_{зл}(\delta, d) = \begin{cases} 1 & \text{для } \frac{зливу}{нісків} \\ 0 & \end{cases}$	$\delta_p = \delta_{cp} + \frac{V_{cp}\alpha}{gd_p^2}$	∞
Гідрокласифікатор при стиснених умовах	$\varepsilon_{зл}(\delta, d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} th \left[\frac{ah}{4D} (d^2 - d_p^2) \right],$ де $a = g(\delta - \delta_{cp})/\alpha$	$d_p = \sqrt{\frac{\alpha V_{cp}}{g(\delta - \delta_p)}}$	$\frac{g(\delta_0 - \delta_{cp})h}{4\alpha D}$
Гідроциклон	$\varepsilon_{зл}(\delta, d) = 0,5 - 0,5 th [Ah/(4D)],$ де $A = \frac{V_o^2 d^2}{R} \cdot \frac{\delta - \bar{\delta}}{\alpha} - V_{cp}$	$d_p = \sqrt{\frac{Q_{вих}\alpha R}{SV_o^2(\delta - \bar{\delta})}}$	$\frac{hV_o^2(\delta - \bar{\delta})}{4\alpha RD}$

Закінчення таблиці 4.7

1	2	3	4
Роликовий (барабанний) магнітний сепаратор для стиснених умов	$\varepsilon_K(\delta, \chi) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ для зони $\frac{\kappa - my}{\partial x}$.	$\delta_p = \frac{RHgradH}{V_o^2} \chi_p$	∞
Стрічковий магнітний сепаратор	$\varepsilon_K(\delta, \chi) = 0,5 + 0,5th[Ah/(4D)]$, де $A = \frac{1}{\alpha} [g(\delta - \bar{\delta}) - HgradH(\chi - \bar{\chi})]$	$g(\delta_p - \bar{\delta}) - HgradH \times \frac{hHgradH}{8\alpha D}$ $\times (\chi_p - \bar{\chi}) = 0$	при $\delta = \delta_0 = const$
Флотаційна машина	$\varepsilon_K(k) = 1 - \exp(-St_{\phi l} k)$ ($S=500 - 1200 \text{ м}^2/\text{м}^3$)	$k_p = \ln 2 / (St_{\phi l})$	$0,5St_{\phi l}$
Електричний сепаратор у стиснених умовах	$\varepsilon_K(\delta, q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}th\left[\frac{Eh(q - q_p)}{4\alpha D}\right]$	$q_p = \frac{V_o^2 \delta}{RE}$	$\frac{Eh}{8\alpha D}$
Примітка. $Q_{вих}$, M – продуктивність і маса матеріалу на грохоті; $V_c(d)$ – залежність швидкості просівання на сітці грохота від розміру частинок; h – глибина зони сепарації; V_{cp} – швидкість висхідного потоку у гідрокласифікаторі; V_o , R – окружна швидкість і радіус кривизни для гідроциклону; H , E – напруженість магнітного і електричного полів.			

РОЗДІЛ 5

ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

У цьому розділі автори дотримуються класичного підходу до моделювання об'єктів, який включає, *по-перше*, опис вхідних по відношенню до збагачувальної фабрики чи окремого технологічного процесу (машини) матеріальних та енергетичних потоків, *друге* – моделювання окремих технологічних процесів, що застосовуються при збагаченні корисних копалин, і *третє* – використання характеристик вихідних матеріальних потоків і характеристик цих же потоків у технологічному апараті як вихідних параметрів – проміжних та основних.

При цьому виділені підготовчі, основні та заключні процеси збагачення. При цьому приклади моделювання процесів збагачення корисних копалин залучені з теоретичних і прикладних праць провідних вітчизняних і зарубіжних науковців. Описано застосування комп'ютерної техніки для моделювання, що сьогодні увійшло у повсюдну практику.

Приклади моделювання окремих субпроцесів (за феноменологічною моделлю) наводяться епізодично. Приклади моделювання окремих характерних елементів технологій (наприклад, температурних полів сушарок тощо) за браком місця не наведені.

5.1 Опис вихідної мінеральної сировини

Для рішення ряду техніко-технологічних задач збагачення, контролю і автоматизації технологічних процесів (складання теоретичних балансів продуктів збагачення, вибір обладнання і розрахунок навантажень на нього, контроль параметрів потоків мінеральної сировини, автоматичне керування технологічними процесами та ін.) Необхідні математично описані дані (моделі) ситового, фракційного, мінералогічного та ін. Складу корисної копалини.

Універсальний підхід до математичного опису властивостей сипкої мінеральної сировини запропоновано математичною статистикою на основі функцій розподілу властивостей мінералів (рис. 5.1). Використовуючи функції розподілу можна математично описати контрастність розділових ознак корисної копалини – тобто відмінність властивостей між вмісними породами і цінним компонентом, між окремими класами крупності і фракціями цінного компонента за густиною,

змочуваністю, кольором, блиском, магнітною сприйнятливістю, діелектричною проникністю, електропровідністю тощо. Кожна з властивостей x характеризується не одним числом, а функцією розподілу $f(x)$. Якщо корисна копалина складається з двох мінералів, то кожний з них має функцію розподілу $f_1(x)$ і $f_2(x)$. Спільна площа цих функцій (заштриховано) визначає діапазон властивостей, де не можна розрізнити цінний мінерал від вмісної породи. Кількість мінералу, яку неможливо розрізнити за властивістю x складає величину, пропорційну площі заштрихованого сектора $\varphi = \int_{-\infty}^{x_n} f_2 dx - \int_{x_n}^{\infty} f_1 dx$. Коли функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ повністю співпадають, то $\varphi = 1$ і неможливо розрізнити весь мінерал. Показник контрастності за і. К. Младецьким $k = 1 - \varphi$ [25].

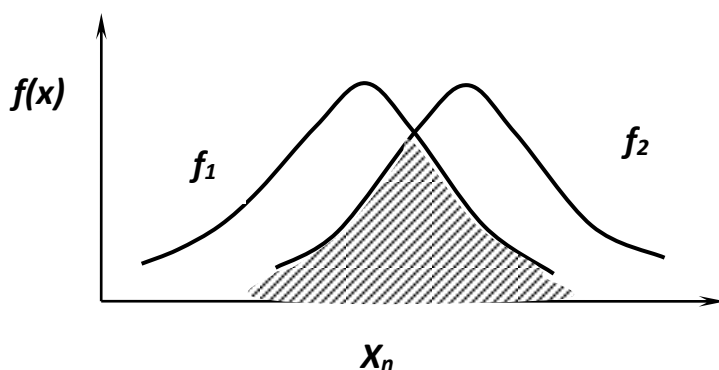


Рисунок 5.1 - розподіл властивостей двох мінералів корисної копалини

Разом з тим, математичний опис ситового, фракційного, мінералогічного та ін. Складу корисної копалини має суттєві індивідуальні відмінності.

У нашому розгляді ми зупинимося на найбільш часто застосовуваних у збагаченні ситовому та фракційному аналізі сипкої гірничої маси.

5.1.1 Математичний опис гранулометричного складу сипкої мінеральної сировини

Для математичного опису закономірностей розподілу корисних копалин по класах різної крупності було запропоновано багато аналітичних виразів (моделей) [16, 18].

Ж. Мартін вперше розглядав суміш зерен подрібненого матеріалу як статистичний масив. Для опису розподілу частинок по класах крупності

він застосував експоненціальний закон кельвіна і представив розподіл по числу зерен в вигляді:

$$dN/dx = ae^{-bx}, \quad (5.1)$$

де x – середній розмір частинок.

Узагальнюючи велику кількість результатів ситових аналізів дроблених продуктів, а. Годен вивів емпіричне степеневе рівняння для математичного опису їх гранулометричного складу по класу дрібніше x (по «– d »), тобто рівнянні характеристики крупності:

$$y = Ax^k, \quad (5.2)$$

де y – сумарний вихід класу дрібніше розміру отворів сита (по «– d »); x – розмір отворів сита; k і a – параметри, які залежать від властивостей матеріалу і його максимальної крупності.

Пізніше с. Андрєєв, аналізуючи процес подрібнення, прийшов до такого ж висновку і рівняння (5.2) одержало назву рівняння годена-андрєєва. Воно по суті є математичною моделлю сипкої маси і дозволяє вирішувати ряд задач: визначити вихід будь-якого класу крупності, число зерен в будь-якому класі, поверхню зерен, питому поверхню та ін.

Для подрібнених продуктів кульових млинів значення показника k в рівнянні (5.2) знаходиться в межах 0,7 – 1.

П. Розін і є. Рамлер, аналізуючи гранулометричний склад подрібнених продуктів як статистичну сукупність зерен, встановили, що функціональна залежність між сумарним залишком на ситі і крупністю зерен в більшості випадків з достатньою для практики точністю описується експоненціальним рівнянням:

$$R = 100e^{-bx^n}, \%, \quad (5.3)$$

де r – сумарний вихід класу крупніше x (по «+ d »), %; x – розмір отворів сита; b і n – параметри, що залежать від властивостей матеріалу і розмірності величини x .

Рівняння (5.3) в одних країнах по імені авторів одержало назву рівняння розіна-рамлера, в інших – рівняння rrs , або rrb , або $rrsb$.

Параметр b непрямо характеризує вміст найдрібніших (менше 1 мкм) зерен: чим їх більше в матеріалі, тим більше b .

Параметр n характеризує ступінь увігнутості кривої сумарних залишків, побудованої у координатах $r = f(d/d_c)$, де d – розмір чарунок

сита, мкм; d_c – розмір чарунок такого сита, на якому одержують «стандартний» залишок ($r_c = 36,8 \%$).

Рівняння характеристики крупності дозволяє визначити залежність між r і x , число зерен в будь-якому класі, площу поверхні зерен, питому поверхню та інше. Але при використанні рівняння розіна-рамлера нульовий вихід досягається тільки при нескінченно великій крупності матеріалу, тобто $r = 0$ при $x = \infty$, тому необхідно приймати кінцеву крупність матеріалу, яка відповідає якому-небудь визначеному значенню виходу класу.

Таким чином, для опису гранулометричного складу зернистих матеріалів запропоновано багато формул. Поширення знайшли рівняння годена-андреєва і розіна-рамлера, але найбільш точно розподіл корисної копалини за класами крупності може бути описаний рівнянням розіна-рамлера.

Придатність рівняння розіна-рамлера для опису розподілу по крупності видобутого і дробленого вугілля різних родовищ англії показали дж. Беннет і дж. Івенс, родовищ США – м. Гір і х. Янсі. Придатність для аналізу розподілу по крупності тонких вугільних частинок в практиці вуглеприготування підтвердив в. Ромадін (росія), а розподілу в інших діапазонах крупності – ряд інших авторів.

Дослідження, проведені УкрНДІВуглезбагачення, показали, що найбільш точно розподіл вугілля за класами крупності може бути описано рівнянням Розіна-Рамлера. Однак показник p цього рівняння не залишається постійним для усього діапазону крупності, тому при постійних параметрах це рівняння дає задовільну точність тільки для визначеного діапазону крупності вугілля.

Приклад 5.1. Виконати розрахунок ситового аналізу вугілля по вузькій шкалі з використанням вихідних даних наведених в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 - Ситовий аналіз вугілля

Клас, мм	Вихідні дані		Розрахунок		
	γ , %	A, %	$\gamma \cdot A$	$\gamma_{\text{сум}}^{+d}$	$A_{\text{сум}}^{+d}$
+25	$\gamma_1 = 6$	$A_1 = 59,20$	355,2	6	59,20
13 - 25	$\gamma_2 = 28$	$A_2 = 45,00$	1260,0	34	47,50
0,5 - 13	$\gamma_3 = 52$	$A_3 = 36,90$	1918,8	86	41,10
0 - 0,5	$\gamma_4 = 14$	$A_4 = 22,90$	320,6	100	38,55
Разом	100	38,55	3854,6	—	—

Розрахунок

Розрахунок виконується з використанням рівняння Розіна-Рамлера.

Введемо позначення: $d_1 = 25$, $d_2 = 13$, $d_3 = 0,5$, $d_4 = 0$ мм.

Розрахунок ситового аналізу виконується з використанням рівняння Розіна–Рамлера.

Розрахункові рівняння:

$$\gamma_{\text{сум}}^{+d} = \gamma_{\text{вих}} \cdot e^{-bd^n}, \quad (5.4)$$

$$A = \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_{\text{сум}}^{+d}} \cdot e^{-bd^n}. \quad (5.5)$$

1-й інтервал: $d > d_2$ ($d > 13$ мм)

Розрахунок може викликати інтерес при визначенні максимальної крупності матеріалу і з'ясування необхідності його дроблення, а також при визначенні можливості використання однопотокової схеми збагачення вугілля.

Визначаємо коефіцієнти n і b в рівняннях (5.4) і (5.5) для даного інтервалу.

Таблиця 5.2 – Коефіцієнти n і b для 1-ого інтервалу

n і b для визначення виходів	n і b для визначення зольностей
1	2
$n_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1} - \ln \frac{100}{\gamma_2}}{\ln d_1 - \ln d_2} = 1,4657$	$n_2 = \frac{\ln \frac{100A_{\text{âðö}}}{\gamma_1 \dot{A}_1} - \ln \frac{100A_{\text{âðö}}}{\gamma_2 \dot{A}_2}}{\ln d_1 - \ln d_2} = 1,5417$
$b_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1^{n_1}} = 0,02532$	$b_2 = \frac{\ln \frac{100A_{\text{âðö}}}{\gamma_1 \dot{A}_1}}{d_1^{n_2}} = 0,01668$
Результати розрахунку: $d_1 = 25$ мм; $d_2 = 13$ мм; $\gamma_1 = 6$ %; $\gamma_2 = 28$ %; $A_1 = 59,2$ %; $A_2 = 45,0$ %; $A_{\text{вих}} = 38,55$ %.	

Розраховуємо виходи і зольності в інтервалі $d > 13$ мм.

Таблиця 5.3 – Склад класу > 13 мм

Вихід: $\gamma_{\text{сум}}^{+d} = 100 \cdot e^{-b_1 d^{n_1}}$, %	Зольність: $A = \frac{100 A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_{\hat{n}\hat{o}i}^{+d}} \cdot e^{-b_2 d^{n_2}}$, %
$\gamma_{\text{сум}}^{+20} = 12,96$	$A_{\text{сум}}^{+20} = 54,86$
$\gamma_{\text{сум}}^{+40} = 0,35$	$A_{\text{сум}}^{+40} = 80,28$
$\gamma_{20-25} = \gamma_{+20} - \gamma_{+25} = 6,96$	$A_{20-25} = 51,12$
$\gamma_{13-20} = \gamma_{13-25} - \gamma_{20-25} = 21,04$	$A_{13-20} = 42,98$
$\gamma_{25-40} = \gamma_{+25} - \gamma_{+40} = 5,65$	$A_{25-40} = 57,89$

2-й інтервал: $d_2 \geq d \geq d_3$ ($13 \geq d \geq 0,5$ мм)

Розрахунок може викликати інтерес при визначенні глибини збагачення, крупності розділення матеріалу на машинні класи, зольності дрібних класів.

Визначаємо коефіцієнти n і b в рівняннях (5.4) і (5.5) для даного інтервалу.

Таблиця 5.4 – коефіцієнти n і b для 2-ого інтервалу

n і b для визначення виходів	n і b для визначення зольностей
1	2
$n_3 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2} - \ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}}{\ln d_2 - \ln d_3} = 0,604$	$n_4 = \frac{\ln \frac{100 A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1 \hat{A}_1 + \gamma_2 \hat{A}_2} - \ln \frac{100 A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1 \hat{A}_1 + \gamma_2 \hat{A}_2 + \gamma_3 A_3}}{\ln d_2 - \ln d_3} = 0,707$
$b_3 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}{d_2^{n_3}} = 0,229$	$b_4 = \frac{\ln \frac{100 A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1 \hat{A}_1 + \gamma_2 \hat{A}_2}}{d_2^{n_4}} = 0,142$
Результати розрахунку: $d_2 = 13$ мм; $d_3 = 0,5$ мм; $\gamma_1 = 6$ %; $\gamma_2 = 28$ %; $\gamma_3 = 52$ %; $A_1 = 59,2$ %; $A_2 = 45,0$ %; $A_3 = 36,9$ %; $A_{\text{вух}} = 38,55$ %	

Розраховуємо виходи і зольності в інтервалі $13 \geq d \geq 0,5$ мм.

Таблиця 5.5 – Склад класу 0,5 – 13 мм

Вихід: $\gamma_{\text{сум}}^{+d} = 100 \cdot e^{-b_3 d^{n_3}}$, %	Зольність: $A = \frac{100 A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_{\hat{n}\hat{o}\hat{i}}^{+d}} \cdot e^{-b_4 d^{n_4}}$, %
$\gamma_{\text{сум}}^{+6} = 50,85$	$A_{\text{сум}}^{+6} = 45,82$
$\gamma_{\text{сум}}^{+3} = 64,08$	$A_{\text{сум}}^{+3} = 44,19$
$\gamma_{\text{сум}}^{+1} = 79,52$	$A_{\text{сум}}^{+1} = 42,07$
$\gamma_{6-13} = \gamma_{+6} - \gamma_{+13} = 16,85$	$A_{6-13} = 42,43$
$\gamma_{3-13} = \gamma_{+3} - \gamma_{+13} = 30,08$	$A_{3-13} = 40,45$
$\gamma_{1-13} = \gamma_{+1} - \gamma_{+13} = 45,52$	$A_{1-13} = 38,01$
$\gamma_{0,5-6} = \gamma_{0,5-13} - \gamma_{6-13} = 35,15$	$A_{0,5-6} = 34,25$
$\gamma_{0,5-3} = \gamma_{0,5-13} - \gamma_{3-13} = 21,92$	$A_{0,5-3} = 32,03$
$\gamma_{0,5-1} = \gamma_{0,5-13} - \gamma_{1-13} = 6,48$	$A_{0,5-1} = 29,10$
$\gamma_{3-6} = \gamma_{3-13} - \gamma_{6-13} = 13,23$	$A_{3-6} = 37,93$
$\gamma_{1-3} = \gamma_{1-13} - \gamma_{3-13} = 15,44$	$A_{1-3} = 33,26$

3-й інтервал: $d < d_3$ ($d < 0,5$ мм)

Розрахунок може викликати інтерес при визначенні характеристики шламів і можливості використання для їхньої переробки гвинтовою сепарацією, збагачення у гідросайзері або зневоднення.

Розрахункові рівняння:

$$\gamma_{\hat{n}\hat{o}\hat{i}}^{+d} = \gamma_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}} \cdot e^{-d(ad^2+bd+c)}, \quad (5.6)$$

$$A = \frac{100 A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_{\hat{n}\hat{o}\hat{i}}^{+d}} \cdot e^{-d(ad^2+bd+c)}. \quad (5.7)$$

Визначаємо коефіцієнти a , b і c в рівняннях (5.6) і (5.7) для даного інтервалу.

Таблиця 5.6 – Коефіцієнти а, b і с для 3-ого інтервалу

<i>a, b і с</i> для визначення виходів	<i>a, b і с</i> для визначення зольностей
$a_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)} -$ $- \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}{d_2(d_1 - d_2)(d_2 - d_3)} +$ $+ \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}}{d_3(d_2 - d_3)(d_1 - d_3)} = 0,00082$ $b_1 = \frac{\frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1} - \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}{d_2}}{d_1 - d_2} -$ $- a(d_1 - d_2) = -0,029$ $c_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1} - ad_1^2 - bd_1 = 0,316$	$a_2 = \frac{\ln \frac{100A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1\hat{A}_1}}{d_1(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)} -$ $- \frac{\ln \frac{100\hat{A}_{\hat{e}\hat{n}\hat{o}}}{\gamma_1\hat{A}_1 + \gamma_2\hat{A}_2}}{d_2(d_1 - d_2)(d_2 - d_3)} +$ $+ \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1\hat{A}_1 + \gamma_2\hat{A}_2 + \gamma_3\hat{A}_3}}{d_3(d_2 - d_3)(d_1 - d_3)} = 0,00045$ $b_2 = \frac{\frac{\ln \frac{100\hat{A}_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1\hat{A}_1}}{d_1} - \frac{\ln \frac{100\hat{A}_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1\hat{A}_1 + \gamma_2\hat{A}_2}}{d_2}}{d_1 - d_2} -$ $- a(d_1 - d_2) = -0,015$ $c_3 = \frac{\ln \frac{100\hat{A}_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_1\hat{A}_1}}{d_1} - ad_1^2 - bd_1 = 0,183$
$d_1 = 25\text{мм}; d_2 = 13\text{мм}; d_3 = 0,5\text{мм}; \gamma_1 = 6\%; \gamma_2 = 28\%; \gamma_3 = 52\%;$ $A_1 = 59,2\%; A_2 = 45,0\%; A_3 = 36,9\%; A_{\text{вих}} = 38,55\%$	

Розраховуємо виходи і зольності в інтервалі $d < 0,5\text{ мм}$.

Таблиця 5.7 – Склад класу 0 – 0,5 мм

Вихід: $\gamma_{\tilde{n}\tilde{o}\tilde{i}}^{+d} = \gamma_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}} \cdot e^{-d(a_1d^2+b_1d+c_1)}, \%$	Зольність: $A = \frac{100A_{\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{\gamma_{\tilde{n}\tilde{o}\tilde{i}}^{+d}} \cdot e^{-d(a_2d^2+b_2d+c_2)}, \%$
$\gamma_{\text{сум}}^{+0,2} = 93,98$	$A_{\text{сум}}^{+0,2} = 39,57$
$\gamma_{\text{сум}}^{+0,1} = 96,92$	$A_{\text{сум}}^{+0,1} = 39,06$
$\gamma_{0-0,2} = 100 - \gamma_{+0,2} = 6,02$	$A_{0-0,2} = 22,63$
$\gamma_{0-0,1} = 100 - \gamma_{+0,1} = 3,08$	$A_{0-0,1} = 22,50$
$\gamma_{0,1-0,2} = \gamma_{+0,1} - \gamma_{+0,2} = 2,94$	$A_{0,1-0,2} = 22,76$
$\gamma_{0,2-0,5} = \gamma_{+0,2} - \gamma_{+0,5} = 7,98$	$A_{0,2-0,5} = 23,08$

Результати розрахунку ситового аналізу наведені в табл. 5.8.

Таблиця 5.8 – Результати розрахунку ситового аналізу

КЛАС, ММ	$\Gamma, \%$	$A, \%$	$\gamma_{\text{сум}}^{+d}, \%$
+40	0,35	80,28	0,35
25 – 40	5,65	57,89	6,00
20 – 25	6,96	51,12	12,96
13 – 20	21,04	42,98	34,00
6 – 13	16,85	42,43	50,85
3 – 6	13,23	37,93	64,08
1 – 3	15,44	33,26	79,52
0,5 – 1	6,48	29,10	86,00
0,2 – 0,5	7,98	23,08	93,98
0,1 – 0,2	2,94	22,76	96,92
0 – 0,1	3,08	22,50	100,00
РАЗОМ	100,00	38,55	–

5.1.2 Математичний опис фракційного складу сипкої мінеральної сировини

Під фракційним складом, як правило, розуміють кількісний розподіл частинок мінералу (у %) за їх густиною, магнітною сприйнятливістю,

провідністю, радіоактивністю, іншими якісними ознаками. Фракційний склад визначається за результатами фракційного аналізу і подається у вигляді таблиць, на підставі яких будуються криві збагачуваності та ведуться розрахунки теоретично можливих показників збагачення (якісно-кількісного балансу).

Фракційний аналіз проводять при розробці технологічної схеми гравітаційного збагачення вугілля, вольфрамових, рідкіснометалічних, олов'яних руд. Його виконують за стандартною методикою, якою унормовані кількість та густина розчинів рідини, порядок вилучення спливаючих та осілих продуктів, визначення їх виходу (у % відносно маси вихідної проби). Для фракційного аналізу пробу крупністю -25 мм розділяють на класи крупності. Класи до +3 мм розділяють на фракції у важких середовищах (рідинах) або розбирають вручну і потім визначають густину кожного шматка з точністю до 0,1-0,02 г/см³. Класи -3 мм +20 мкм розділяють на фракції за густиною у важких рідинах із застосуванням центрифуги. Як важкі рідини використовують розчини хлориду цинку, рідину Сущина-Рорбаха, бромформ, тетраброметан і інш. Результати розділення вугілля або руди по фракціях служать еталоном для порівняння промислових проб гравітаційного збагачення. Результати фракційного аналізу використовують для побудови кривих збагачуваності корисних копалин, визначення теоретично можливих якісно-кількісних показників гравітаційного збагачення корисних копалин, а також визначення категорії збагачуваності вугілля.

Розглянемо докладніше математичне представлення (моделювання) фракційного аналізу вугілля за густиною і на основі нього оцінку збагачуваності.

Для математичної оцінки збагачуваності вугілля за результатами фракційного аналізу було запропоновано багато аналітичних виразів (моделей) – Р. Анрі, В. Бердом, В.Я. Топорковим, Ф. Майером, Т.Г.Фоменком, та ін. Однак не всі вони можуть бути рекомендовані, тому що допускають деякі погрішності, що іноді приводить до неправильних висновків при порівнянні результатів дослідницьких робіт і різних варіантів проектів збагачувальних фабрик.

Метод Р. Анрі. Інтегральні криві, які визначають сумарний вихід фракцій, для оцінки розподілення золи у вугіллі першим запропонував застосовувати 1903 р. Р. Шарве. У 1905 р. ці криві були більш глибоко вивчені і описані у вигляді кривих збагачуваності Р. Анрі, а потім

доповнені, особливо у відношенні їхньої математичної інтерпретації, К. Рейнгардтом. З цього часу вони широко використовуються для характеристики речовинного складу досліджуваного вугілля.

За довгий період застосування і удосконалення кривих збагачуваності їхнє визначення змінювалося і уточнювалося. Найбільш відповідними характеру залежностей, які досліджуються є криві (рис. 5.2):

- крива λ відбиває залежність між сумарним виходом і зольністю в елементарних фракціях;
- крива β – залежність між сумарним виходом фракцій, що спливли (концентратних) і їх зольністю;
- крива Θ – залежність між сумарним виходом фракцій, що потонули (породних) і їх зольністю;
- крива δ – залежність між густиною розділення і виходами фракцій.

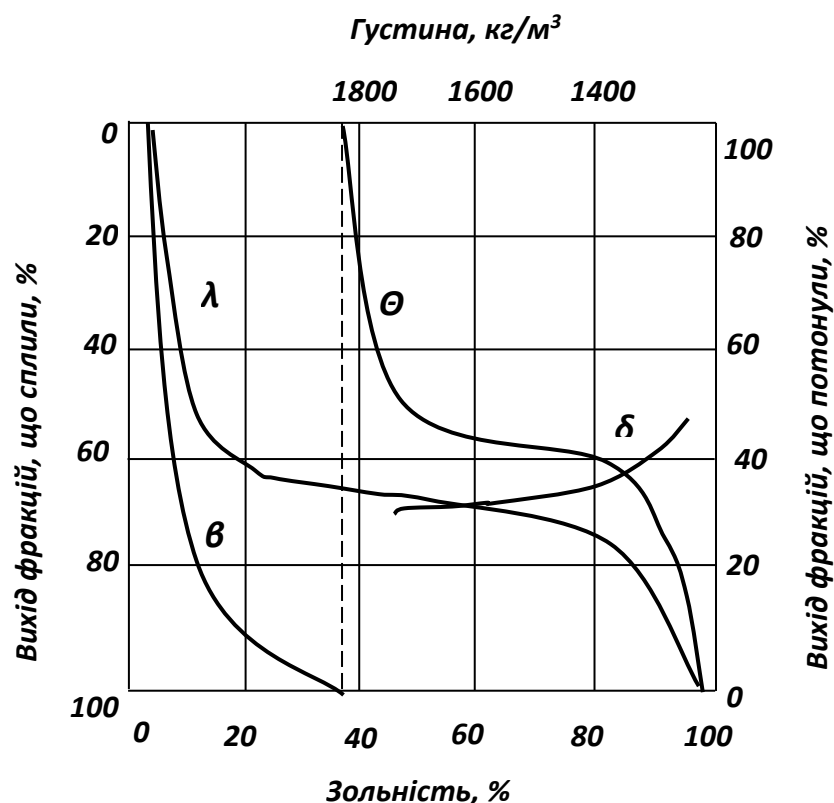


Рисунок 5.2 – Криві збагачуваності вугілля.

Криві збагачуваності пов'язані між собою балансовими рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} 100 &= \gamma_{\beta} + \gamma_{\Theta}, \\ 100A_{\text{вих}}^d &= \gamma_{\beta}A_{\beta}^d + \gamma_{\Theta}A_{\Theta}^d. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Цей зв'язок дозволяє за графіком однієї кривої побудувати інші.

За графіком кривих збагачуваності можна визначити теоретичні показники розділення вугілля, густину розділення і ступінь його збагачуваності (табл. 5.9).

Таблиця 5.9 – Класифікація вугілля за збагачуваністю

Ступінь збагачуваності	Категорія збагачуваності	Показник збагачуваності, %
Легкий	1	До 5 вкл.
Середній	2	Більше 5 до 10 вкл.
Важкий	3	Більше 10 до 15 вкл.
Дуже важкий	4	Більше 15

Метод В. Берда. Сутність методу полягає в тому, що за вирішальний фактор, який визначає збагачуваність вугілля, прийнято вихід фракцій, що відрізняються від густини розділення на $\pm 100 \text{ кг/м}^3$. Вільна порода густиною більше 2000 кг/м^3 (крім антрацитів) Бердом виключалась, щоб уникнути помилкового уявлення про дійсну збагачуваність вугілля через наявність породи, яка потрапляла при видобутку вугілля з покрівлі і підшви пласта.

Про збагачуваність даного вугілля при прийнятій густині розділення судять по величині відрізків, що відсікаються на кривій $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ вертикальними лініями, які проходять через точки відповідних густин (рис. 5.3). Наприклад, якщо розділення вугілля здійснюється по густині 1300 кг/м^3 , то вихід у збагачуваному вугіллі фракцій, що відрізняються на $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ від густини розділення, характеризується відрізком a_1a_2 , а якщо розділення здійснюється по густині 1400 кг/м^3 , то вихід у збагачуваному вугіллі цих фракцій характеризується відрізком b_1b_2 і т.д. Чим більше величина відрізка, тим важче збагачуваність вугілля.

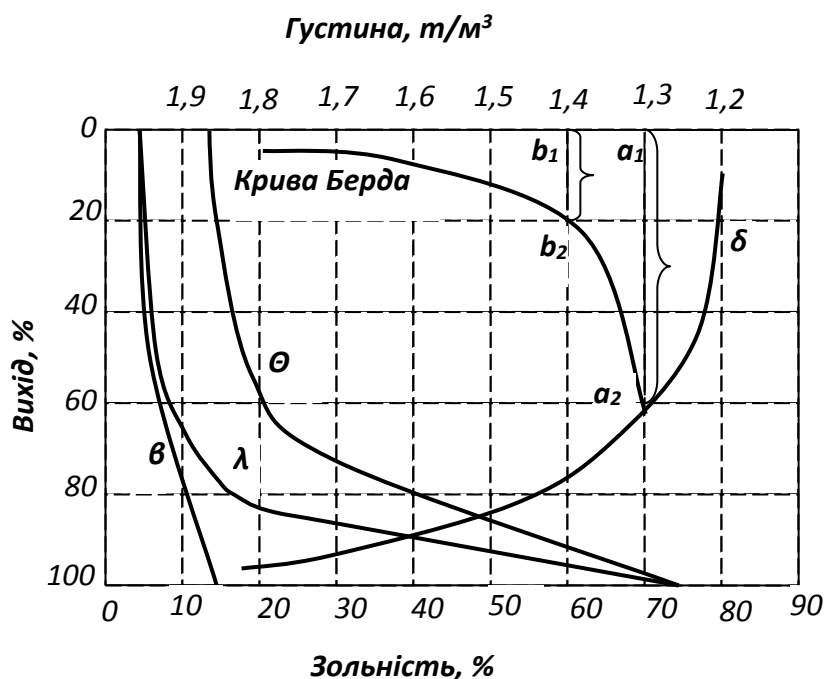


Рисунок 5.3 – Крива Берда.

За кривими В. Берда визначають кількість прилеглих до густини розділення фракцій ($\pm 100 \text{ кг/м}^3$) і по їх відношенню до безпородної маси визначають коефіцієнт збагачуваності:

$$T = \frac{\gamma_{\delta_p \pm 100}}{100 - \gamma_n} \cdot 100, \%, \quad (5.9)$$

де $\gamma_{\delta_p \pm 100}$ – вихід фракцій, густина яких відрізняється на $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ від густини розділення, %; γ_n – вихід породних фракцій густиною більше 2000 г/м^3 .

Поправка на вихід чистої породи здійснюється таким чином: якщо у вугіллі міститься більше 15 % фракцій густиною більше 2000 кг/м^3 , а, відповідно, залишок більш легких фракцій складає 85 %, вводиться поправочний коефіцієнт $K = 100/85 = 1,18$. Тобто при визначенні величини відрізків по кривій В. Берда вони повинні бути помножені на коефіцієнт K .

В. Берд запропонував наступну градацію важкості збагачуваності вугілля (табл. 5.10)

Однак, показник T не тільки не дозволяє визначити можливі результати збагачення вугілля, але й не дає оцінки можливого засмічення продуктів збагачення сторонніми фракціями. Важливою є оцінка засмічення продуктів збагачення не прилеглими до густини фракціями, а

фракціями значно віддаленими від густини розділення, тому що саме вони суттєво впливає на технологічну і економічну ефективність збагачення.

Таблиця 5.10 – Ступінь важкості збагачуваності вугілля за В. Бердом

Показник по кривій $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ (у % виходу по масі)	Ступінь важкості збагачуваності вугілля
0 – 7	Легка
7 – 10	Середня
10 – 15	Важка
15 – 20	Дуже важка
20 – 25	Надзвичайно важка
Більше 25	Майже непереборна

Метод В.Я. Топоркова. За цим методом запропоновано збагачуваність вугілля оцінювати з використанням формули:

$$T = 100 \gamma / \beta B, \quad (5.10)$$

де γ – теоретичний вихід легкої фракції при розділенні по густині 1500 кг/м^3 , %;

β – зольність легкої фракції при розділенні по густині 1500 кг/м^3 , %;

B – вихід вугільної фракції густиною менше 1800 кг/м^3 , %.

На основі цієї формули В.Я. Топорков запропонував шкалу оцінки збагачуваності вугілля (табл. 5.11).

Недоліком показника збагачуваності за В.Я. Топорковим є те, що величина T може бути однаковою для вугілля різної категорії збагачуваності і, крім того, він не враховує умов, які визначають раціональну якість концентрату.

Метод Ф. Майєра. Майєром запропонована крива (рис. 5.4), яка виражає середнє значення збагачуваності вугілля. Цю криву отримують підсумовуванням площі, які замкнені основною лінією кривої Р. Анрі (λ).

Таблиця 5.11 – Ступінь важкості збагачуваності вугілля за В.Я. Топорковим

Індекс збагачуваності	Ступінь важкості збагачуваності вугілля
Більше 20	Висока (легка) 1
20 – 16	Висока (легка) 2
16 – 14	Середня 1
14 – 12	Середня 2
12 – 10	Низька (важка) 1
10 – 8	Низька (важка) 2
8 – 7	Низька (важка) 3
7 – 6	Дуже низька 1
6 – 5	Дуже низька 2
Менше 5	Надзвичайно низька

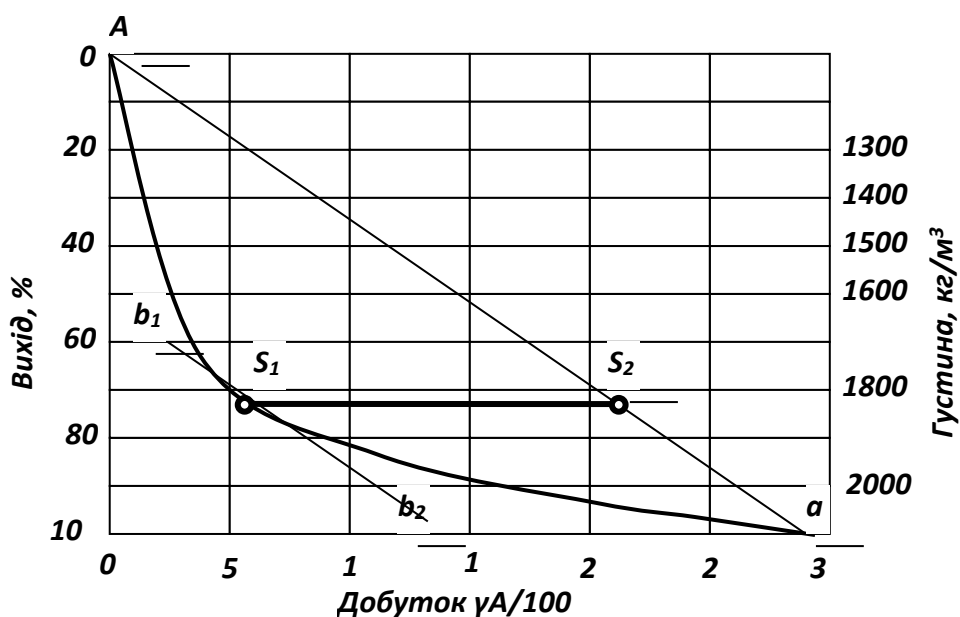


Рисунок 5.4 – Крива збагачуваності Майєра.

Точки кривої Майєра характеризують границі фракцій різної густини. Кожна хорда кривої між двома її точками представляє собою відповідну фракцію у вигляді вектора, довжина ординати якого – це вихід фракції (%), а довжина абсциси – кількість зольних одиниць цієї фракції (помножена на 100). Нахил вектора (тангенс кута між хордою і ординатою) характеризує зольність фракцій. Чим менше радіус кривизни кривої

Майєра, тим легше збагачуваність вугілля і, навпаки, із збільшенням радіуса кривизни важкість збагачення зростає.

Ступінь збагачуваності вугілля за Майєром визначається величиною «половинного лінійного розсіяння» – відрізком S_1S_2 (рис. 5.4), який відповідає довжині абсцис між променем Aa , що з'єднує кінці кривої Майєра, і точкою дотику лінії b_1b_2 до кривої проведеної паралельно променю Aa , тобто:

$$S_1S_2 = (A_{вих}^d - A_{\beta}^d)\gamma_{\beta}, \quad (5.11)$$

де $A_{вих}^d$ – зольність вихідного вугілля; A_{β}^d – зольність фракцій, що спливли; γ_{β} – вихід фракцій, що спливли.

На думку Майєра зі збільшенням величини S_1S_2 збагачуваність вугілля поліпшиться. Мінімальне значення відрізка S_1S_2 безпосередньо залежить від зольності вихідного вугілля і виходу продукту, що сплив, який у свою чергу визначається зольністю вихідного продукту.

Якщо порівняти приведені методи визначення збагачуваності, можна відмітити, що метод В. Берда, хоча й характеризує важкість розділення, але не дає можливості встановити найвигідніший режим розділення даного вугілля. Крім того, прийнятий інтервал відхилення від густини розділення $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ є умовним.

Методи В.Я. Топоркова і Ф. Майєра найбільш прості, але користуватися ними можна тільки в тому випадку, якщо попередньо задана густина розділення, вихід або зольність фракцій, що спливають, тобто саме те, що необхідно визначити з використанням характеристики вугілля.

Метод Т.Г. Фоменка. За цим методом визначення збагачуваності вугілля здійснюється з використанням кривої елементарних фракцій і виражається у вигляді коефіцієнта збагачуваності (рис. 5.5).

При ідеально легкій збагачуваності крива елементарних зольностей буде наближатися до координат діаграми AOB , а при ідеально важкій – до прямої AB . Усі інші проміжні положення кривої λ будуть відповідати проміжним значенням збагачуваності. Крива λ достатньо точно характеризується стрілою прогину f , тобто відстанню по нормалі від найбільш віддаленої точки кривої λ (вершини кривої). Вершина кривої λ , позначена точкою C , визначає положення демаркаційної лінії MN .

Відношення величини даної величини прогину f до максимально можливої її величині F (для кривої, що виражає ідеально легку збагачуваність) прийнято за коефіцієнт або за показник збагачуваності:

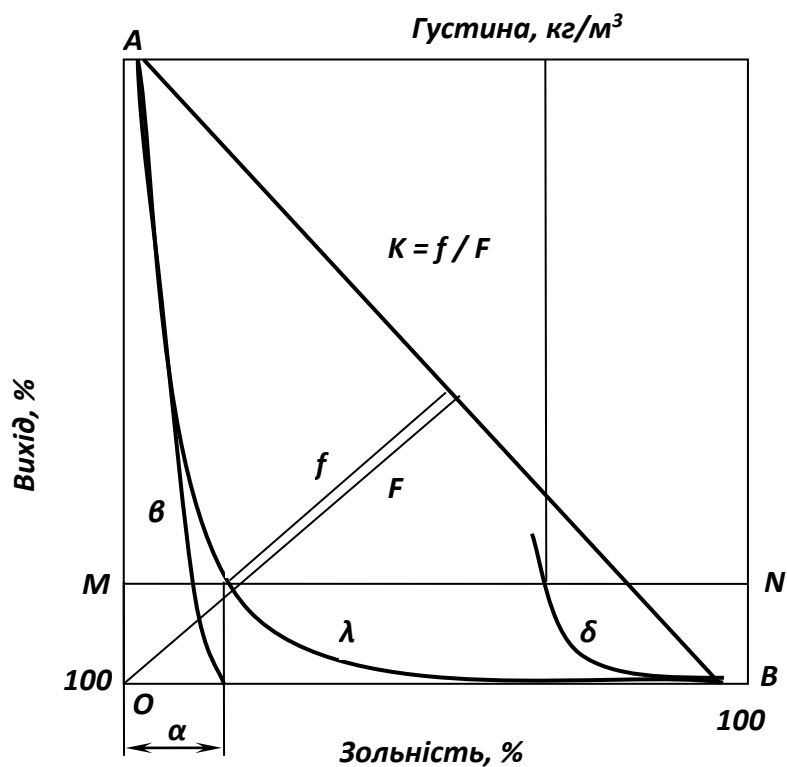


Рисунок 5.5 – Діаграма для визначення найвигіднішого режиму розділення

$$K = f / F. \quad (5.12)$$

Значення цього показника змінюється від 0 при ідеально важкій збагачуваності до 1 при ідеально легкій збагачуваності вугілля. Показник збагачуваності K , який визначається вершиною кривої λ , завжди визначає і найвигідніший режим розділення даного вугілля, тому що демаркаційна лінія, що проходить через вершину кривої, вказує оптимальний вихід концентрату. З використанням коефіцієнта K і найвигіднішої густини розділення побудована класифікація вугілля і антрацитів по збагачуваності (табл. 5.12).

З використанням даних табл. 5.12 можуть бути орієнтовно визначені режимні і технологічні показники збагачення вугілля.

Якщо порівняти наведені методи визначення збагачуваності, можна відмітити:

– за методом Р. Анрі можна визначити теоретичні показники розділення вугілля, густину розділення і ступінь його збагачуваності;

– метод В. Берда, хоча й характеризує важкість розділення, але не дає можливості встановити найвигідніший режим розділення даного вугілля. Крім того, прийнятий інтервал відхилення від густини розділення $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ є умовним;

– методи В.Я. Топоркова і Ф. Майєра найбільш прості, але користуватися ними можна тільки в тому випадку, якщо попередньо задана густина розділення, вихід або зольність фракцій, що спливають, тобто саме те, що необхідно визначити з використанням характеристики вугілля;

– метод Т.Г. Фоменка дозволяє орієнтовно визначити режимні і технологічні показники збагачення вугілля.

Таблиця 5.12– Класифікація вугілля і антрацитів по збагачуваності

Група	Буре вугілля			Кам'яне вугілля			Антрацити		
	Вихід концентрату до безпородної маси, %	Показник кривої λ , К	Густина розділення, т/м^3	Вихід концентрату до безпородної маси, %	Показник кривої λ , К	Густина розділення, т/м^3	Вихід концентрату до безпородної маси, %	Показник кривої λ , К	Густина розділення, т/м^3
I	–	–	–	> 90	> 0,8	1,3– 1,4	> 90	0,8– 1,0	1,55– 1,8
II	–	–	–	90 – 80	0,7 – 0,85	1,35– 1,45	90 – 80	0,7– 0,9	1,55– 1,8
III	–	–	–	80 – 70	0,6– 0,75	1,35– 1,45	80 – 70	0,76– 0,58	1,55– 1,8
IV	–	–	–	70 – 60	0,45– 0,61	1,4– 1,5	70 – 60	0,64– 0,45	1,6– 1,8
V	60 – 50	0,3– 0,1	1,3– 1,5	60 – 50	0,3– 0,45	1,4– 1,5	60 – 50	0,35– 0,5	1,6– 1,8
VI	50 – 40	0,2– 0,0	1,3– 1,5	–	–	–	–	–	–
VII	< 40	0,08– 0,0	1,35– 1,5	–	–	–	–	–	–

Приклад 5.2. За відомим фракційним складом вугілля розрахувати прогностні технологічні показники операції гравітаційного збагачення. Вихідні дані для розрахунку і його результати наведені в табл. 5.13.

Таблиця 5.13– Розрахунок технологічних показників

Фракційний склад живлення			Сепараційна характеристика $\epsilon_k(\rho_i)$, частки од.	Потік твердого у фракціях концентрату $\bar{q}_i = Q_{вих}[\epsilon_k(\rho_i) \times \gamma_{вих}(\rho_i)\Delta\rho_i]$, т/год	Потік золи у фракціях концентрату $Q_{iz} = Q_{вих} \times [\beta(\rho_i)/100] \times \epsilon_k(\rho_i) \times \gamma_{вих}(\rho_i)\Delta\rho_i$, т/год	Фракційний склад концентрату $\gamma_k(\rho_i)\Delta\rho_i = \gamma^{-1}\epsilon_k(\rho_i)\gamma_{вих}(\rho_i)\Delta\rho_i$, частки од.
Границі фракції $\Delta\rho = \rho_{i+1} - \rho_i$, т/м ³	Вихід фракції у вихідному концентраті $\gamma(\rho_i)\Delta\rho_i$	Зольність $\beta(\rho_i)$, частки од.				
1	2	3	4	5	6	7
1,2 – 1,3	0,373	3,5	1,000 0	$0,373 \cdot 1,0000 = 0,373$	$(3,5/100) \cdot 0,373 = 0,0131$	0,624
1,3 – 1,4	0,143	6,3	0,999 7	$0,143 \cdot 0,9997 = 0,143$	$(6,3/100) \cdot 0,143 = 0,0090$	0,239
1,4 – 1,5	0,073	14,3	0,956 3	$0,073 \cdot 0,9563 = 0,070$	$(14,3/100) \cdot 0,070 = 0,0100$	0,117
1,5 – 1,6	0,019	29,2	0,563 6	$0,019 \cdot 0,5636 = 0,011$	$(29,2/100) \cdot 0,011 = 0,0032$	0,018
1,6 – 1,8	0,043	48,5	0,015 0	$0,043 \cdot 0,0150 = 0,001$	$(48,5/100) \cdot 0,001 = 0,0002$	0,002
1,8 – 2,2	0,349	81,4	0,000 0	$0,349 \cdot 0 = 0$	$(81,4/100) \cdot 0 = 0$	–
1,2 – 2,2	$\Sigma = 1$	$\bar{\beta}_{вих} = 34,3$	–	$Q_k = \Sigma \bar{q}_i = 0,598Q_{вих}$	$\Sigma \bar{q}_{iz} = 0,0358Q_{вих}$	$\Sigma = 1$

Фракційний склад вугілля в живленні операції наведений в 1 – 3 стовпцях, при цьому діапазон густини від $\rho_{\min} = 1,2$ т/м³ до $\rho_{\max} = 2,2$ т/м³ розділений на шість фракцій.

Середня зольність (стовпець 3) розрахована як середня величина:
 $\bar{\beta}_{\text{вих}} = 0,373 \cdot 3,5 + 0,143 \cdot 6,3 + \dots + 0,349 \cdot 81,4 = 34,3 \%$.

У стовпці 4 наведена неідеальна сепараційна характеристика, яка показує кількість кожної елементарної фракції, що вилучається в концентрат при густині розділення $\rho_p = 1,6 \text{ т/м}^3$.

Потік твердого у фракціях концентрату показано у стовпці 5. Сума цих потоків – вихід концентрату, тобто $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_{\text{вих}} = 59,8 \%$.

Потоки золи, які переносяться фракціями в концентрат наведені в стовпчику 6. Сума цих потоків поділена на вихід концентрату дозволяє отримати середню зольність концентрату: $\bar{\beta}_k = \sum \bar{q}_i / \sum \bar{q}_i = 0,0358 / 0,598 = 6,0 \%$.

Фракційний склад концентрату (стовпець 7) розраховано як відношення потоку твердого в кожну окрему фракцію до сумарного потоку твердого в концентрат.

Приклад 5.3. За даними фракційного аналізу вугілля класу 13 – 100 мм (табл. 5.14) побудувати криві збагачуваності і скласти теоретичний баланс продуктів збагачення при зольності концентрату $A_k^d = 7 \%$ і зольності відходів $A_g^d = 80 \%$.

Таблиця 5.14 – Фракційний аналіз вугілля класу 13 – 100 мм і дані для побудови кривих збагачуваності

Густина фракцій, т/м ³	Вихідне вугілля		Фракції, що спливають		Фракції, що тонуть	
	γ , %	A , %	γ^c , %	A^c , %	γ^n , %	A^n , %
1	2	3	4	5	6	7
< 1,3	34,9	4,8	34,9	4,8	100,0	38,0
1,3-1,4	11,2	7,2	46,1	5,4	65,1	55,8
1,4-1,5	10,8	15,0	56,9	6,8	53,9	65,9
1,5-1,6	1,1	31,1	58,0	7,7	43,1	78,6
1,6-1,8	1,7	45,2	59,7	8,7	42,0	79,8
> 1,8	40,3	81,3	100,0	38,0	40,3	81,3
Разом	100,0		—	—	—	—

Криві збагачуваності (рис. 5.6) будують у системі координат, де по нижній осі абсцис відкладають зольність фракцій, по верхній осі абсцис –

густину розділення, по лівій осі ординат – сумарний вихід фракцій, що спливли, по правій осі ординат – сумарний вихід фракцій, що потонули.

Розрахунок сумарного виходу продукту, що сплив, виконується послідовним підсумовуванням виходів фракцій зверху униз.

Наприклад:

– вихід фракції -1400 кг/м^3 :

$$\gamma_{-1400} = \gamma_{-1300} + \gamma_{1300-1400} = 34,9 + 11,2 = 46,1\%;$$

– зольність цієї фракції визначається як середня величина:

$$A_{-1400} = \frac{\gamma_{-1300} \cdot A_{-1300} + \gamma_{1300-1400} \cdot A_{1300-1400}}{\gamma_{-1400}} = \frac{34,9 \cdot 4,8 + 11,2 \cdot 7,2}{46,1} = 5,4\%$$

і т.д.

За даними стовпців 4 і 5 будується крива β , фракцій, що сплили.

Розрахунок сумарного виходу продукту, що потонув, виконується послідовним підсумовуванням виходів фракцій знизу вгору.

Наприклад:

– вихід фракції $+1600 \text{ кг/м}^3$:

$$\gamma_{+1600} = \gamma_{+1800} + \gamma_{1600-1800} = 40,3 + 1,7 = 42,0\%;$$

– зольність цієї фракції визначається як середня величина:

$$A_{+1600} = \frac{\gamma_{+1800} \cdot A_{+1800} + \gamma_{1600-1800} \cdot A_{1600-1800}}{\gamma_{+1600}} = \frac{40,3 \cdot 81,3 + 1,7 \cdot 45,2}{46,1} = 79,8\%$$

і т.д.

За даними стовпців 6 і 7 будується крива Θ , фракцій, що потонули.

Для побудови кривої елементарних фракцій λ з використанням даних стовпчиків 2 і 3 будується стовпчасти діаграма і через середні точки на вертикальних сторонах прямокутників проводиться плавна крива. При цьому площі трикутників, які відсікаються і приєднуються, повинні бути рівні, тому що площа під кривою λ – кількість золи в досліджуваному матеріалі і для даного матеріалу величина незмінна.

Крива густини фракцій δ будується за даними стовпців 1 і 4.

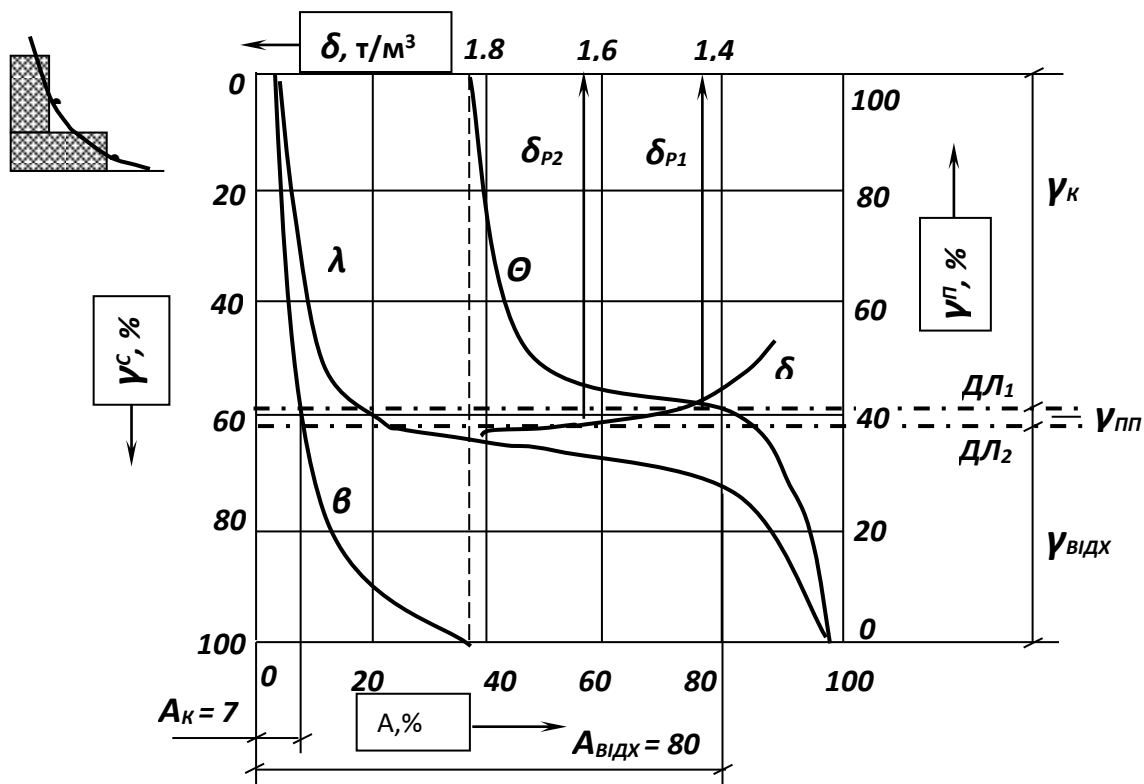


Рисунок 5.6 – Криві збагачуваності вугілля.

При заданих зольності концентрату $A_K^d = 7 \%$ і зольності відходів $A_B^d = 80 \%$ визначаємо теоретичні показники розділення: виходи продуктів, зольність промпродукту і густину розділення (табл. 5.15)

Таблиця 5.15 – Теоретичні показники розділення вугілля

Продукт	$\gamma, \%$	$A, \%$	$\delta_p, \text{кг/м}^3$
Концентрат	56,5	7,0	1430
Промпродукт	2,0	42,3	1620
Відходи	41,5	80,0	
Разом	100,0	38,0	

Приклад 5.4. За даними експрес-аналізу виконати розрахунок повного фракційного аналізу.

Вихідні дані: фракційний аналіз вугілля марки К (табл. 5.16), мінімальна і максимальна густина вугілля різних марок (табл. 5.17).

Таблиця 5.16 – Фракційний аналіз вугілля

Густина фракцій, т/м ³	Дано		Розрахунок	
	γ , %	A, %	γ^B , %	A^B , %
1,5	$\gamma_1 = 60$	$A_1 = 10$	$\gamma_1^B = 60$	$A_1^B = 10,0$
1,5 – 1,8	$\gamma_2 = 10$	$A_2 = 40$	$\gamma_2^B = 70$	$A_2^B = 14,3$
+ 1,8	$\gamma_3 = 30$	$A_3 = 80$	$\gamma_3^B = 100$	$A_3^B = 34,0$
Разом	100	34	—	—

Таблиця 5.17 – Мінімальна і максимальна густина вугілля різних марок

Марка вугілля	Д	Г	Ж	К	ПС	П	А
Мінімальна густина, т/м ³	1,28	1,27	1,26	1,25	1,28	1,31	1,55
Максимальна густина, т/м ³	2,40						2,50

Розрахунок

Введемо позначення: $\delta_{\min} = 1,25$; $\delta_1 = 1,3$; $\delta_2 = 1,4$; $\delta_3 = 1,5$; $\delta_4 = 1,6$; $\delta_5 = 1,8$; $\delta_6 = 2,0$; $\delta_7 = \delta_{\max} = 2,4$ т/м³.

Розрахунок фракційного аналізу виконується з використанням математичного опису кривих збагачуваності у відповідності до закону інтегрального розподілення фракцій Вейбулла.

1. Інтервал $\delta < 1,5$ т/м³

Необхідність розрахунку може виникнути при підвищеній зольності легких фракцій ($\delta < 1,5$ т/м³).

Зольність фракцій:

$$A_{-1,3} = A_{-1,5} + (A_{1,8}^B - A_{-1,5}) \cdot \frac{\delta_5(\delta_1 - \delta_3)}{\delta_1(\delta_5 - \delta_3)} = 6,03, \%;$$

$$A_{1,3-1,5} = A_{-1,3} + (A_{+1,8} - A_{-1,3}) \cdot \frac{\delta_{\max}(\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_{\min})}{(\delta_1 + \delta_3)(\delta_{\max} - \delta_{\min})} = 22,57, \%$$

Виходи фракцій:

$$\gamma_{-1,3} = \frac{A_{1,3-1,5} - A_{-1,5}}{A_{1,3-1,5} - A_{-1,3}} \cdot \gamma_{-1,5} = 45,60, \%;$$

$$\gamma_{1,3-1,5} = \gamma_{-1,5} - \gamma_{-1,3} = 14,40, \%.$$

2. Інтервал $1,4 \leq \delta \leq 1,8 \text{ т/м}^3$

Розрахунок виконується з використанням рівняння вейбулла для кривої збагачуваності β :

$$\gamma_B = \frac{1}{A_B} \cdot \left[\gamma_{орз} \cdot A_{орз} + \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{A_B}{A_{орз}} \right)^{1/k} \right].$$

Визначаємо параметри k і α в рівнянні вейбулла:

$$k = \frac{\ln \ln \frac{A_{-1,8}}{A_{-1,3}} - \ln \ln \frac{A_{-1,5}}{A_{-1,3}}}{\ln \frac{\gamma_{-1,8} A_{-1,8} - \gamma_{-1,3} A_{-1,3}}{\gamma_{-1,5} A_{-1,5} - \gamma_{-1,3} A_{-1,3}}} = 0,804;$$

$$\alpha = \frac{\ln \frac{A_{-1,5}}{A_{-1,3}}}{\gamma_{-1,5} A_{-1,5} - \gamma_{-1,3} A_{-1,3}} = 0,0048.$$

Зольність фракцій, що спливли :

$$A_{1,4}^B = A_{-1,5} + (A_{-1,8} - A_{-1,5}) \cdot \frac{\delta_5(\delta_2 - \delta_3)}{\delta_2(\delta_5 - \delta_3)} = 8,16, \%;$$

$$A_{1,6}^B = A_{-1,5} + (A_{-1,8} - A_{-1,5}) \cdot \frac{\delta_5(\delta_4 - \delta_3)}{\delta_4(\delta_5 - \delta_3)} = 11,61, \%;$$

$$A_{1,8}^B = 14,30, \%.$$

Виходи фракцій, що спливли :

$$\gamma_{1,4}^B = \frac{1}{A_{1,4}^B} \cdot \left[\gamma_{-1,3} \cdot A_{-1,3} + \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{A_{1,4}^B}{A_{-1,3}} \right)^{1/k} \right] = 54,90, \%;$$

$$\gamma_{1,6}^B = \frac{1}{A_{1,6}^B} \cdot \left[\gamma_{-1,3} \cdot A_{-1,3} + \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{A_{1,6}^B}{A_{-1,3}} \right)^{1/k} \right] = 63,65, \% ;$$

$$\gamma_{1,8}^B = 70,0, \% .$$

Таблиця 5.18 – Виходи елементарних фракцій і їх зольність

Вихід, %	Зольність, %
$\gamma_{1,3-1,4} = \gamma_{1,4}^B - \gamma_{-1,3} = 9,30$	$A_{1,3-1,4} = 18,60$
$\gamma_{1,4-1,6} = \gamma_{1,6}^B - \gamma_{1,4}^B = 8,75$	$A_{1,4-1,6} = 33,26$
$\gamma_{1,6-1,8} = \gamma_{1,8}^B - \gamma_{1,6}^B = 6,35$	$A_{1,6-1,8} = 41,26$
$\gamma_{1,4-1,5} = \gamma_{1,3-1,5} - \gamma_{1,3-1,4} = 5,10$	$A_{1,4-1,5} = 29,81$
$\gamma_{1,5-1,6} = \gamma_{1,4-1,6} - \gamma_{1,4-1,5} = 3,65$	$A_{1,5-1,6} = 38,08$

3. Інтервал $\delta > 1,8 \text{ т/м}^3$

Необхідність розрахунку може виникнути при зниженій зольності важких фракцій ($\delta > 1,8 \text{ т/м}^3$).

Зольність фракцій, що потонули:

$$A_{1,8-2} = A_{1,5-1,8} + (A_{+1,8} - A_{1,5-1,8}) \cdot \frac{(\delta_5 + \delta_7)(\delta_5 - \delta_3)}{(\delta_5 + \delta_6)(\delta_7 - \delta_3)} = 54,74, \% ;$$

$$A_{+2} = A_{1,5-1,8} + (A_{+1,8} - A_{1,5-1,8}) \cdot \frac{(\delta_5 + \delta_7)(\delta_7 + \delta_6 - \delta_5 - \delta_3)}{(\delta_6 + \delta_7)(\delta_7 - \delta_3)} = 86,67 \%$$

Виходи фракцій, що потонули:

$$\gamma_{1,8-2} = \frac{A_{+2} - A_{+1,8}}{A_{+2} - A_{1,8-2}} \cdot \gamma_{+1,8} = 6,27, \% ;$$

$$\gamma_{+2} = \gamma_{+1,8} - \gamma_{1,8-2} = 23,73, \% .$$

Результати розрахунку наведені в табл. 5.19.

Таблиця 5.19 – Результати розрахунку фракційного аналізу вугілля

Густина фракцій, т/м ³	Γ , %	A , %	Перевірка
–1,3	45,60	6,03	$\gamma_{-1,5} = 60,00$
1,3 – 1,4	9,30	18,60	$A_{-1,5} = 10,00$
1,4 – 1,5	5,10	29,81	
1,5 – 1,6	3,65	38,08	$\gamma_{1,5-1,8} = 10,00$
1,6 – 1,8	6,35	41,26	$A_{1,5-1,8} = 40,10$
1,8 – 2	6,27	54,74	$\gamma_{+1,8} = 30,00$
+ 2	23,73	86,67	$A_{+1,8} = 80,00$
Разом	100,00	34,01	

5.2. Моделювання підготовчих процесів збагачення корисних копалин

5.2.1. Моделювання процесів дезінтеграції (дроблення і подрібнення)

Факторна модель процесу дроблення

Вхідними факторами процесу дроблення є (рис. 5.7): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад (Γ_1), крупність вихідного матеріалу (D_{max}) і його дробимість (D) та навантаження на процес (G).

Вихідні фактори: максимальний розмір зерен у дробленому матеріалі (d_{max}) і його гранулометричний склад (Γ_2). Важливою вихідною технологічною характеристикою процесу дроблення є ступінь дроблення (i), яка для сучасної техніки знаходиться в межах 4 – 8. Виняток складають тільки конусні інерційні дробарки із ступенем дроблення до 15 і дробарки ударної дії із ступенем дроблення 20 – 40.

Основним оперативним керуючим фактором процесу дроблення є навантаження по вихідному матеріалу (G).

Фактори, які збурюють процес: гранулометричний склад (Γ_1) і дробимість (D) вихідної сировини.

Важливими конструктивними характеристиками дробарок, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип дробарки, зусилля дроблення, хід робочого органа і частота його руху.

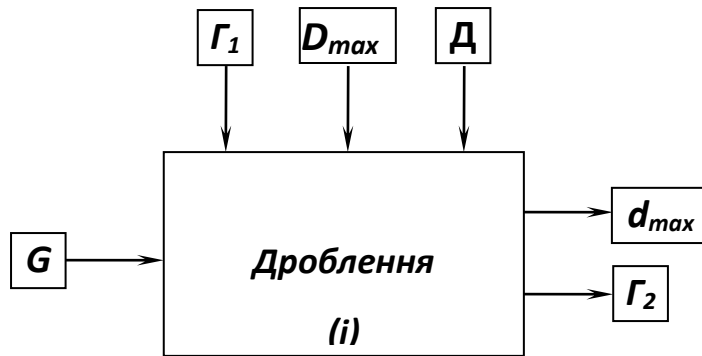


Рисунок 5.7 - Факторна модель процесу дроблення.

Розглянемо вплив цих факторів на процес дроблення.

Крупність вихідного і дробленого продуктів визначають стадію дроблення (крупне, середнє і дрібне дроблення).

Міцність гірських порід впливає на вибір типу дробарки і, відповідно, на тип зусиль дроблення, які застосовуються (роздавлювання, стирання, розколювання, удар). *Тріщинуватість і пористість* значно покращують *дробимість* гірських порід, що сприяє підвищенню продуктивності процесу.

Факторна модель процесу подрібнення

Вхідними факторами процесу подрібнення є (рис. 5.8): характеристики подрібнювальної сировини, зокрема, крупність вихідного матеріалу (D_{max}), його подрібнюваність (Π), навантаження на процес по твердому (G), навантаження на процес по воді (W_1), частота обертання барабана млина (n), що визначає режим його роботи.

Вихідні фактори: максимальний розмір зерен у подрібненому матеріалі (d_{max}) і його гранулометричний склад (Γ_2). Важливим *проміжним фактором* можна розглядати розрідженість пульпи (R). У окремих

процесах подрібнення, наприклад вугілля в процесі підготовки водо вугільного палива, важливим вихідним фактором є також фізико-хімічна характеристика зовнішньої поверхні вугільних зерен, яка може бути оцінена потенціалом їх поверхні (φ_e).

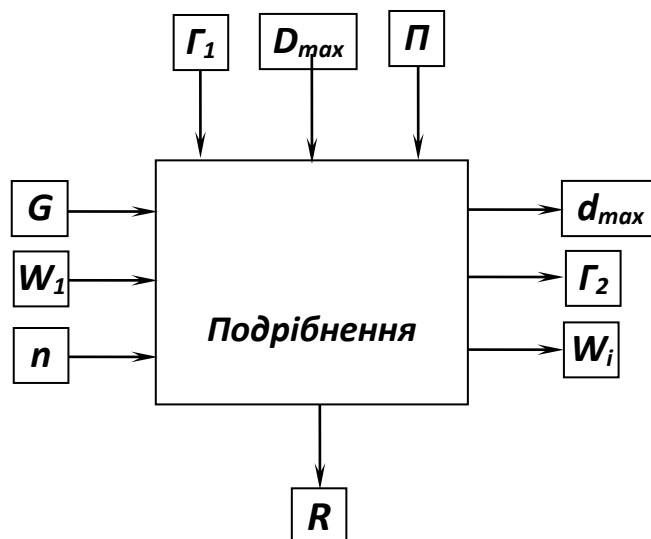


Рисунок 5.8 - Факторна модель процесу подрібнення.

Оперативними керуючими факторами процесу подрібнення можуть виступати: навантаження на процес по твердому і по воді, частота обертання барабана млина. Періодичним фактором керування може бути подрібнююче середовище (його склад і характеристики, зокрема, гранулометричний склад подрібнювального навантаження).

Фактори, які збурюють процес: гранулометричний склад (Γ_1) і подрібнюваність (Π) вихідної сировини.

Важливими конструктивними характеристиками барабанних млинів, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип млина, його розмір ($D \times L$), форма футеровки, характеристики подрібнюючих тіл і ступінь заповнення ними млина.

Розглянемо вплив цих факторів на процес подрібнення.

Між продуктивністю млина твердому (G) і подрібнюваністю матеріалу, його крупністю і крупністю подрібненого продукту існує прямо пропорційна залежність. Практикою встановлено, що *оптимальна крупність живлення* стержневих млинів – 15 – 20 мм, а кульових – 10 – 15

мм (така крупність може бути отримана після тристадіального дроблення). Для млинів самоподрібнення крупність живлення – 300 – 500 мм (така крупність може бути отримана після одностадіального дроблення). Чим менше крупність вихідного матеріалу і чим крупніше подрібнений продукт, тим вище продуктивність млина.

В залежності від *частоти обертання барабана млина* розрізняють *каскадний, змішаний і водоспадний швидкісні режими* руху подрібнюючих тіл. Каскадний режим руху подрібнюючих тіл здійснюється при малій частоті обертання барабана ($n = 0,5 - 0,6$ критичної) і є найбільш сприятливим для стержневих млинів. Для кульових млинів каскадний режим застосовується при мокрому і сухому подрібненні неміцних матеріалів (при виробництві цементу, підготовці пиловугільного палива та ТЕС і т.п.).

Змішаний режим руху подрібнюючих тіл характеризується поступовим переходом від суто каскадного до суто водоспадного режиму і спостерігається при проміжних значеннях частоти обертання барабана ($0,6 - 0,76$ критичної). Змішаний режим має місце при подрібненні руд у кульових млинах.

При водоспадному режимі частота обертання барабана складає не менше $0,76 - 0,88$ критичної. Цей режим застосовується у більшості промислових млинів при подрібненні крупних і важкоподрібнюваних матеріалів.

З ростом *ступені заповнення φ млина подрібнюючим середовищем* зростає витрата енергії на подрібнення і досягає максимуму при ступені заповнення $\varphi = 50 \%$. Відповідно зростає й продуктивність млина.

З підвищенням відносної *частоти обертання* спостерігається підвищення споживаної питомої потужності. Одночасно продуктивність і вихід класу – 0,074 мм в розрахунку на 1 кВт·год зростають приблизно також, як і частота. Однак це справедливо до деякої межі (для млинів типу «Аерофол» при частоті обертання барабану відносно критичної - до $\psi = 0,95$; для млинів типу «Каскад» - до $\psi = 0,85$). Якщо у живленні млина самоподрібнення міститься багато дріб'язку, його продуктивність знижується, тому що не існує достатньої кількості крупних грудок, які могли би роздрібнити грудки середньої величини, руда подрібнюється дуже повільно і, головним чином, стиранням.

Розрідження пульпи у млині визначає масу або об'єм твердого матеріалу, який знаходиться у ньому у кожний даний момент, а також

ефективність дії подрібнюючих тіл. Загальний об'єм пульпи у млині приблизно постійний, тому зі збільшенням вмісту у пульпі води вміст твердого зменшується, і навпаки. При меншому вмісті води густина пульпи збільшується і, отже, подрібнюючі тіла при русі у більш густому середовищі будуть мати меншу силу удару. Вміст води у пульпі визначає її текучість і здатність проходження через млин. При вмісті води близько 20 % матеріал достатньо вільно проходить через млин. Чим більше густина пульпи, тим більше крупних частинок досягає розвантажувального кінця млина. У млинах з центральним розвантаженням цей крупний матеріал іде у розвантаження і вміст крупного класу у продукті подрібнення збільшується. У млинах з решіткою густа пульпа, яка містить крупні частинки затримується решіткою і збільшення вмісту крупного класу у розвантаженні млина не спостерігається. При великих розрідженнях пульпи матеріал швидше проходить млин з решіткою, що приводить до укрупнення продукту подрібнення. У млинах з центральним розвантаженням великі розрідження, навпаки, приводять до збільшення вмісту дрібних класів у подрібненому продукті.

Гранулометричний склад подрібнювального навантаження суттєво впливає на гранулометрію подрібненого матеріалу, що використовується як фактор впливу на процес (і, відповідно, при його моделюванні), наприклад, при підготовці висококонцентрованого водовугільного палива (ВВП).

Подрібнюваність (II) вихідної мінеральної сировини, зокрема, залежить від тріщинуватості матеріалу, на що впливає відомий ефект Ребіндера. Виходячи з цього, з метою регулювання гранулометричного складу, реологічних та седиментаційних характеристик ВВП регулюючим фактором процесу подрібнення вугілля може бути тривалість його попереднього (перед подрібненням) контакту з водою. Сучасні моделі подрібнення вугілля при підготовці ВВП повинні враховувати цей фактор (канал впливу).

Математичні моделі процесів дезінтеграції

Більше ста років численними дослідниками робляться спроби виявити закономірності, які дозволили би кількісно оцінити гранулометричний склад продуктів дезінтеграції і її енергоємність [4].

Основних гіпотез пояснюючих процеси дезінтеграції три: п. Ріттингера, ф. Кіка і ф. Бонда.

Гіпотеза п. Ріттингера. В 1867 р. Вийшов в світ знаменитий «підручник по збагаченню» відомого австрійського інженера п. Ріттингера, де серед багатьох фундаментальних положень було одне, яке викликало більш ніж вікову дискусію, незакінчену ще й дотепер. Мова йде про гіпотезу, яку автор сформулював таким чином: «... збільшення нової утвореної поверхні прямо пропорційне силі (енергії), необхідній для дроблення».

$$\Xi = K_R D^2, \quad (5.13)$$

де Ξ — енергоємність дезінтеграції; K_R — коефіцієнт пропорційності; d — лінійний розмір грудки.

Гіпотеза ріттингера справедлива при тонкому подрібненні, коли енергія витрачається в основному на утворення нової поверхні, тобто при високому ступені подрібнення.

Гіпотеза ф. Кіка. В 1885 р. Ф. Кік висунув іншу гіпотезу, відповідно якої: «енергія, яка необхідна для отримання зміни конфігурації геометрично подібних тіл однакової будови, змінюється, як маси або об'єми цих тіл». Слід відзначити, що стосовно до деформації пружних тіл ця гіпотеза була доведена російським механіком, проф. В. Кірпічовим за 11 років до появи роботи кіка:

$$\Xi = K_K D^3, \quad (5.14)$$

позначення ті ж.

Однак стосовно роботи дробарок і млинів гіпотеза кіка виявилася не універсальною. Добра відповідність цієї гіпотези має місце при крупному дробленні. При середньому і дрібному дробленні вираз (4.14) дає менш точні результати. При подрібненні ця гіпотеза практично «не працює».

Дійсно, природна гетерогенність гірських порід, нерівномірність поля напружень в об'ємі навантаженої грудки, її анізотропія, багатомасштабна дефектність і, крім того, розмаїтість зовнішніх факторів: форми, розташування, матеріалу, характеру руху робочих частин машини, розташування грудок матеріалу, що дробиться, і т.д. — роблять задачу виведення закону дроблення з точки зору фізики цього процесу, по-перше, надскладною через величезне число параметрів, по-друге, марною, оскільки навіть у гіпотетичному випадку користуватися повною формулою цього закону було б неможливим внаслідок багатофакторності.

Гіпотеза ф. Бонда. Найбільше розповсюдження в другій половині XX сторіччя одержала гіпотеза американського інженера ф. Бонда, відповідно до якої робота руйнування грудки лінійного розміру d пропорційна $d^{2,5}$, що є «проміжним» значенням між пропорційністю d^2 (гіпотеза Ріттінгера) і пропорційністю d^3 (гіпотеза Кіка). Тим самим бонд хотів врахувати два процеси, які супроводжують руйнування, – деформування об'єму і розповсюдження тріщин (утворення нової поверхні):

$$\Xi = K_B D^{2,5}, \quad (5.15)$$

позначення ті ж.

За принципом «побудови» гіпотеза бонда нічим не відрізняється від попередніх: також вибираються два параметри – початкова і кінцева крупність матеріалу – і здійснюється спроба створити двопараметричний функціонал, який апроксимує багатопараметричну залежність. Апроксимація бонда виявилася дуже вдалою, що пояснюється великою кількістю технологій, параметри яких знаходяться в зоні бондівського наближення.

Усі три гіпотези можна об'єднати формулою так званої *узагальнюючої гіпотези*:

$$\Xi = K_m D^{4-m}, \quad (5.16)$$

де K_m – коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу, але не залежить від D .

При $m = 1$ формула (5.16) приймає вигляд, який відповідає гіпотезі ф. Кіка, при $m = 2$ – гіпотезі п. Ріттінгера, при $m = 1,5$ – гіпотезі ф. Бонда.

Після диференціювання залежності (5.16) по d і заміни енергоємності дроблення однієї грудки лінійного розміру на питому енергоємність (на одиницю об'єму) отримуємо:

$$d\xi = K_m'' dD / D^m. \quad (5.17)$$

Після інтегрування формули (5.17) від кінцевої крупності D_f до початкової (припускаючи, що форма грудок усіх крупностей ідентична) отримуємо:

– у відповідності до гіпотези ф. Кіка:

$$\xi = K_1'' \ln \frac{D_0}{D_f}; \quad (5.18)$$

– у відповідності до гіпотези п. Ріттінгера:

$$\xi = K_2''(1/D_f - 1/D_0); \quad (5.19)$$

– у відповідності до гіпотези ф. Бонда:

$$\xi = 2K_{1,5}''(1/\sqrt{D_f} - 1/\sqrt{D_0}). \quad (5.20)$$

Робота доведення одиниці об'єму матеріалу «нескінченної» вихідної крупності ($d_0 = \infty$) до крупності 100 мкм ($d_f = 100$), розрахована за формулою (5.20), називається індексом роботи дроблення по бонду w_i . Індeksi роботи дроблення по бонду для різних матеріалів наведені в табл. 5.20.

Таблиця 5.20– індекс роботи дроблення за бондом w_i

Руда і порода	Густина а, т/м ³	Індекс роботи, квт- год/т	Руда і порода	Густина а, т/м ³	Індекс роботи , квт- год/т
Андезит	2,62	20,3	Мідна руда	3,02	14,1
Базальт	2,90	19,0	Молибденова руда	2,70	13,6
Барит	4,50	5,3	Наждак	3,48	62,5
Боксит	2,20	9,8	Нікелева руда	3,28	15,1
Габбро	3,00	20,5	Олов'яна руда	3,95	12,0
Гематит	3,53	14,3	Піщаник	2,65	28,9
Гіпс	2,69	7,8	Пірит	4,06	9,8
Глина	2,51	7,0	Піротинова руда	4,04	10,5
Гнейс	2,71	22,4	Плавикий шпат	3,01	9,8
Горючі сланці	1,84	17,6	Поташ	2,40	8,9
Гравій	2,66	17,9	Польовий шпат	2,59	11,9
Граніт	2,67	16,8	Рутілова руда	2,80	14,0
Графіт	1,75	48,5	Свинцева руда	3,35	13,1
Діабаз	2,90	21,4	Свинцево-цинкова руда	3,36	11,9
Діорит	2,90	23,2	Сієніт	2,73	14,5
Доломіт	2,74	12,5	Сланець	2,63	17,5
Золотовмісна руда	2,81	16,5	Спекулярит	3,28	15,2
Вапняк	2,66	14,0	Скло	2,58	13,6
Карбід кремнію	2,75	28,6	Таконіти	3,54	16,1
Кварц	2,65	15,0	Титанова руда	4,01	13,6
Кварцит	2,68	10,6	Вугілля	1,40	14,3
Кварцовий пісок	2,67	15,5	Феромарганець	6,32	9,2
Клінкер цементний	3,15	14,8	Феросиліцій	4,41	11,0
Кокс	1,31	16,7	Ферохром	6,66	8,4
Магнезит	3,06	12,3	Фосфорити	2,74	11,0
Магнетит	3,88	11,0	Цинкова руда	3,64	12,8
Марганцева руда	3,53	13,5	Шлак доменний	2,74	11,3

Інтерес до гіпотези бонда привів до того, що Дж. Свенсен і Дж. Мюркес в 1957 р. Запропонували свій варіант формули, який, на їх думку, краще погоджується з експериментальними даними:

$$\Xi = \Xi_0[(100/k_{80})^m - (100/k_{80f})^m], \quad (5.21)$$

де Ξ – витрати енергії, яка необхідна для подрібнення; Ξ_0 – фактор пропорційності; k_{80} – розмір чарунки сита, скрізь яке проходить 80 % подрібненого продукту; k_{80f} – розмір чарунки сита, скрізь яке проходить 80 % вихідного матеріалу.

Значення m в процесі дослідів коливалося в межах 0,8 – 1,3.

У 1957 р. Дж. Холмс запропонував модифіковане емпіричне рівняння, яке зв'язує енергію, необхідну для подрібнення частинки, з її розміром:

$$\Xi = K[1 - (1/R)^r (100/a)^r], \quad (5.22)$$

де Ξ – енергія, яка витрачається при подрібненні; K – показник подрібнюваності; R – ступінь подрібнення; a – розмір частинок; r – показник ступеня відхилення.

Величина r виражає ступінь зміни опору матеріалу подрібненню і зміну ефективності машини при зміні розміру частинок. Значення r залежить від матеріалу і умов прикладення зусиль. Рівняння (5.22) застосовне до крихких і неоднорідних матеріалів. При подрібненні будь-якого матеріалу в кульовому млині визначеного типу значення K і r постійні в межах розміру частинки.

Енергоємність подрібнення в даному кульовому млині, розраховану за рівнянням (5.22), не можна використовувати для інших типів дробарок і млинів, тому що поведінка матеріалу при подрібненні залежить не тільки від його природи, але й від деформуючих зусиль, що прикладаються до нього.

Формула п. Ребіндера. З фізичної точки зору коректною є формула п. Ребіндера:

$$\Xi = K_d D^3 + K_s D^2. \quad (5.23)$$

У відповідності до виразу (5.23) елементарна робота, яка витрачається в процесі руйнування грудки матеріалу, дорівнює сумі роботи по її деформації і роботи утворення нової поверхні (K_d і K_s – коефіцієнти пропорційності).

Перевага формули ребіндера перед викладеними вище трьома основними гіпотезами дроблення полягає перш за все в її адитивній побудові, яка підкреслює багатofакторність процесу руйнування.

Термодинамічна теорія л. Джингезіана. Відповідно до цієї теорії для руйнування матеріалу (дроблення, подрібнення) необхідна деяка кількість енергії, яка складається з кінетичної, – помольних тіл, – і теплової – подрібнюваного матеріалу. Сума кінетичної енергії, необхідної для подрібнення матеріалу, і внутрішньої теплової енергії матеріалу за термодинамічною теорією є величиною постійною.

Фізичні передумови цієї теорії полягають у наступному: частинки, які складають об'єм такого гетерогенного матеріалу, як руда, під дією тепла розширюються неоднаково, що спричиняє в цьому об'ємі внутрішні напруження, які зростають з підвищенням температури. В результаті, за думкою автора теорії, на дроблення нагрітої руди потрібно менше кінетичної енергії дробильних тіл у порівнянні з дробленням не нагрітої руди на величину енергії, витраченої на попередній нагрів.

Теорія запропонована в 1952 р., випробування проводилися з вапняком, кварцом, мідно-нікелевою і свинцево-срібними рудами.

Випробування підтвердили висновки теорії про збільшення площі новоутвореної поверхні при підвищенні температури. Однак постійності суми кінетичної і теплової енергій не спостерігалось, при цьому загальні енерговитрати при дробленні з попереднім нагрівом завжди були вище.

Теорія моделей а. Андреазена. Теорія запропонована в 1953 р., вона дозволяє визначити параметри і процес роботи промислової дробарно-подрібнювальної машини за даними лабораторної машини. Неодмінною умовою такого моделювання є абсолютно беззаперечне виконання таких положень: обидві машини повинні бути строго подібні, тобто мати одну й ту же конструкцію і форму з постійним параметром подібності; теорія може бути застосована тільки до крихких матеріалів, які руйнуються раніше ніж буде перевершена межа пружності.

теорія андреазена базується на спостереженні за руйнуванням геометрично подібних тіл під дією статично подібних зовнішніх сил. Передбачається, що сила, необхідна для руйнування матеріалу,

характеризує природу цього матеріалу при умові, що зовнішні сили руйнують його раніше ніж буде перевершена межа пружності.

Головним контраргументом теорії моделей можна назвати той факт, що руйнування у дійсності – процес масштабно неподібний навіть для ідеальних кристалів. Тим більше, цей процес масштабно неподібний для реальних твердих тіл з недосконалою кристалічною будовою, властивості яких значно змінюються у залежності від розмірів.

Теорія л.горовець [22]. Суттєвий внесок у теорію і моделювання процесу руйнування мінеральної сировини здійснила сучасний український науковець д.т.н. Лариса горовець. Застосувавши метод акустичної емісії вона запропонувала формули для прогнозової оцінки таких показників подрібнення:

Характерний розмір дроблених (подрібнених) зерен:

$$d_x = \frac{1}{K} \sqrt[3]{\frac{V}{N}}, \quad (5.24)$$

Вихід фракцій характерного розміру (частки одиниці):

$$\gamma = \frac{N}{V} l^2 \delta, \quad (5.25)$$

- новоутворена питома поверхня подрібненого продукту, м²/м³:

$$\Delta S = \frac{N l \delta}{V}, \quad (5.26)$$

Де n – сумарна кількість акустичних сигналів у акті руйнування; δ , l – середня величина поздовжнього і поперечного розмірів характерних структурних зерен мінерального зерна; v – об'єм мінерального зерна; k – критерій руйнування (для лабораторних зразків $k = 2,6$).

Таким чином, дотепер, як і раніше, існує три основних гіпотези (і відповідно – моделей) процесів дезінтеграції, які характеризують зв'язок між енергоємністю дроблення і крупність дробленого матеріалу, – гіпотези ріттінгера, кіка і бонда, які базуються на емпіричному матеріалі. Експериментальне порівняння цих гіпотез показує, що для подрібнення при великих поверхнях краще інших відбиває дійсність формула ріттінгера, для крупного дроблення формула кіка, формула бонда може бути застосована при дробленні в проміжному діапазоні крупності.

Приклад 5.5. За даними ситового аналізу вугілля (табл. 5.21) побудувати сумарну характеристику по «+ d » і визначити вихід і

зольність класу 5 – 75 мм, розмір максимального і середнього зерна в пробі досліджуваного матеріалу.

Таблиця 5.21 – ситовий аналіз вугілля

Клас, мм	Вихідні дані		Сумарні дані по «+ d»	
	Γ , %	A^d , %	$\Gamma_{\text{сум}}$, %	$A^d_{\text{сум}}$, %
1	2	3	4	5
+100	6,8	55,8	6,8	55,8
50 – 100	17,6	49,3	24,4	51,1
25 – 50	11,4	40,5	35,8	47,7
13 – 25	10,4	37,8	46,2	45,5
6 – 13	12,7	31,5	58,9	42,5
0,5 – 6	25,6	29,7	84,5	38,6
0 – 0,5	15,5	21,9	100,0	36,0
Разом	100,0	36,0	–	–

Розрахунок сумарних даних по «+ d» виконується послідовним сумуванням, наприклад:

– вихід класу + 50 мм: $\gamma_{+50} = \gamma_{+100} + \gamma_{50-100} = 6,8 + 17,6 = 24,4$ % ;

– зольність класу + 50 мм:

$$A^d_{+50} = \frac{\gamma_{+100} \cdot A^d_{+100} + \gamma_{50-100} \cdot A^d_{50-100}}{\gamma_{+50}} = \frac{6,8 \cdot 55,8 + 17,6 \cdot 49,3}{24,4} = 51,1$$

% і т.д.

За даними стовпців 1 і 4 будуюмо сумарну характеристику крупності, а за даними стовпців 1 і 5 – криву середньої зольності (рис. 5.9).

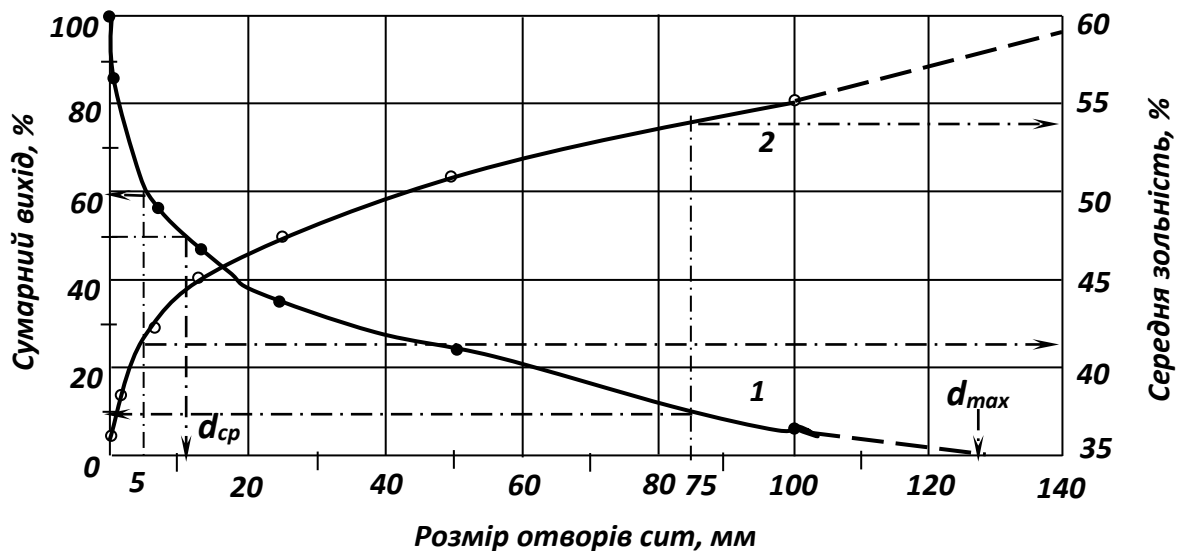


Рисунок 5.9 – Криві ситового аналізу

1 – сумарна характеристика крупності; 2 – крива середньої зольності.

З використанням кривих ситового аналізу визначаємо:

- розмір максимального зерна в пробі $d_{max} = 130$ мм (перетинання продовження сумарної характеристики крупності з віссю абсцис);
- розмір середнього зерна в пробі $d_{cp} = 12$ мм (перетинання проекції точки сумарної характеристики крупності, що відповідає виходу 50 % з віссю абсцис);
- вихід класу 5 – 75 мм, як різницю між виходами класів + 5 і +75 мм:

$$\gamma_{5-75} = \gamma_{+5} - \gamma_{+75} = 60 - 10 = 50\%;$$

– зольність класу 5 – 75 мм за формулою:

$$A_{5-75}^d = \frac{\gamma_{+5} \cdot A_{+5}^d - \gamma_{+75} \cdot A_{+75}^d}{\gamma_{5-75}} = \frac{60 \cdot 42 - 10 \cdot 54}{50} = 39,6\%.$$

При побудові сумарних характеристик у широкому діапазоні крупності зерен досліджуваного матеріалу відрізки на осі абсцис виходять дуже малого розміру, що утруднює використання кривих. Щоб уникнути цього недоліку, сумарні характеристики крупності будують в напівлогарифмічній або логарифмічній системі координат. Обробка великого числа даних гранулометричних аналізів продуктів дроблення та подрібнення показала, що функціональна залежність між сумарним залишком на ситі і крупністю зерен в більшості випадків з достатньою для практики точністю описується рівнянням Розіна-Рамлера:

$$R = 100e^{-bx^n}, \% , \quad (5.27)$$

де R – сумарний вихід класу крупніше x (по «+ d»), %; x – розмір отворів сита; b і n – параметри, що залежать від властивостей матеріалу і розмірності величини x .

Параметр b непрямо характеризує вміст найдрібніших (менше 1 мкм) зерен: чим їх більше в матеріалі, тим більше b .

Параметр n характеризує степінь увігнутості кривої сумарних залишків, побудованої у координатах $R = f(d/d_c)$, де d – розмір чарунок сита, мкм; d_c – розмір чарунок такого сита, на якому одержують «стандартний» залишок ($R_c = 36,8\%$).

Рівняння характеристики крупності дозволяє визначити залежність між r і x , число зерен в будь-якому класі, площу поверхні зерен, питому поверхню та інше. Але при використанні рівняння розіна-рамлера нульовий вихід досягається тільки при нескінченно великій крупності матеріалу, тобто $r = 0$ при $x = \infty$, тому необхідно приймати кінцеву крупність матеріалу, яка відповідає якому-небудь визначеному значенню виходу класу.

5.2.2 Моделювання процесу грохочення

Факторна модель процесу грохочення

Вхідними факторами процесу грохочення є (рис. 5.10): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад вихідного матеріалу (Γ_I), витрата води для ополіскування (W) та навантаження на процес (G_I).

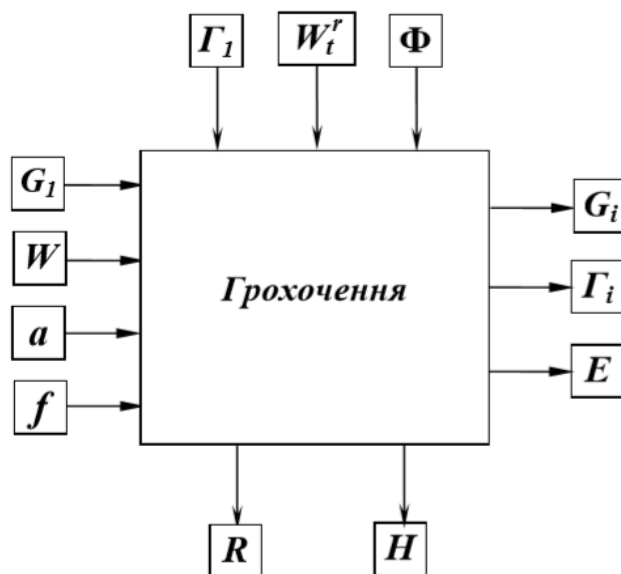


Рисунок 5.10 – Факторна модель процесу грохочення.

Вихідні фактори: гранулометричний склад продуктів грохочення (Γ_i) і їхня кількість (G_i). Важливою вихідною технологічною характеристикою процесу грохочення є ефективність (E). *Проміжними факторами* можна розглядати розпушеність і висота шару матеріалу на ситі грохота (R, H).

Основними оперативними керуючими факторами процесу грохочення є навантаження по вихідному матеріалу (G_1), амплітуда і частота коливань просіюючої поверхні (a, f).

Фактори, які збурюють процес: гранулометричний склад (Γ_1) вихідної сировини, її вологість (W_t^r) фізичні властивості (Φ), основними з яких є густина, абразивність і форма зерен.

Важливими конструктивними характеристиками грохотів, які впливають на процес і його результати, є: конструкція грохота, площа сита, розмір і форма його отворів, кут нахилу просіюючої поверхні.

Розглянемо вплив цих факторів на процес грохочення.

Вплив гранулометричного складу. Дрібні зерна легко проходять крізь отвори сита, але зерна близькі за розміром до отворів сита забивають його. При цьому зменшується площа живого перетину сита і знижується якість грохочення. Зерна, діаметр яких більше 1,5 і менше 0,75 діаметра отворів сита, суттєво не впливають на процес грохочення.

Вологість вихідного матеріалу. Вода, що знаходиться в порах і тріщинах зерен, а також хімічно зв'язана на процес грохочення не впливає. Для грохочення має значення вміст зовнішньої вологи, яка покриває плівкою поверхню зерен матеріалу. Зовнішня волога спричиняє злипання

дрібних частинок між собою, налипання їх на крупні грудки та замазування отворів сит.

Наявність в матеріалі глини навіть при малій вологості значно утруднює процес грохочення. При грохоченні глинистих та в'язких матеріалів перед грохоченням глину відмивають або матеріал підсушують; застосовують мокре грохочення або підогрів сит.

Розміри поверхні грохочення. Продуктивність грохота майже прямо пропорційна ширині сита. Збільшення довжини підвищує імовірність проходження частинок крізь сито, збільшуючи ефективність грохочення. Довжина сита повинна бути у 2 – 3 рази більша від ширини сита.

Насипна густина і форма зерен. Продуктивність грохочення зростає по мірі збільшення насипної густини і наближення форми частинок до кулястої. Крім того, насипна густина матеріалів, які піддають розсіву, визначає вибір типу грохота: легкого ($\delta \leq 1,4 \text{ т/м}^3$), середнього ($\delta \leq 1,8 \text{ т/м}^3$) або важкого ($\delta \leq 2,8 \text{ т/м}^3$).

Форма отворів сита. У практиці грохочення застосовуються просіюючі поверхні з квадратними, щілинними, прямокутними і круглими отворами. Вибір форми отвору залежить від вимог до крупності продуктів грохочення і продуктивності грохота. Круглі отвори в порівнянні з іншими формами того ж номінального розміру дозволяють отримати більш дрібний підрешітний продукт.

Кут нахилу просіюючої поверхні. Кут нахилу просіюючої поверхні впливає на розмір зерна, що вільно проходить крізь отвори сита.

Вважають, що на похилому решеті віброгрохота отримують нижній продукт тієї ж крупності, що й на горизонтальному, якщо розмір отворів похилого решета більше розміру отворів горизонтального в 1,15 рази при куті нахилу 20° і в 1,25 рази при куті нахилу 25° .

Пропорційно зміні кута нахилу просіюючої поверхні змінюється продуктивність грохота і обернено пропорційно – ефективність грохочення та крупність нижнього продукту.

Товщина шару матеріалу на ситі. Існує оптимальна товщина шару матеріалу, при якій спостерігається максимальна швидкість грохочення. Для найбільш успішного грохочення товщина шару матеріалу на ситі не повинна перевищувати 3 – 4-кратних розміри отворів сита.

Швидкість руху зерен по просіюючій поверхні визначає продуктивність грохота як транспортного засобу. Оптимальна швидкість

подачі матеріалу на грохот повинна встановлюватись експериментально в залежності від продуктивності грохота і необхідної ефективності.

Амплітуда і частота коливань короба. Амплітуда і частота коливань короба впливають на продуктивність і ефективність грохочення. Збільшення амплітуди і частоти коливань приводить до збільшення числа контактів зерен з просіюючою поверхнею, поліпшення умов самоочищення сита від зерен, що застряють в отворах, внаслідок чого збільшуються продуктивність і ефективність грохочення. Однак збільшення амплітуди і частоти обмежене механічною міцністю грохота.

Частота коливань повинна зменшуватися, а амплітуда зростати по мірі збільшення розміру отворів сита грохота.

Технологічний розрахунок грохотів зводиться до визначення необхідної площі просіюючої поверхні, а також необхідної ефективності грохочення при заданій продуктивності.

Ефективність грохочення характеризує повноту відсівання нижнього класу (матеріалу дрібніше розміру отворів сит) у підрешітний продукт.

Ефективністю грохочення називається виражене в відсотках або частках одиниці відношення маси підрешітного продукту до маси нижнього класу у вихідному матеріалі. Ефективність грохочення визначається за формулою:

$$E = \frac{(\alpha - \beta)(\vartheta - \alpha) \cdot 10^4}{\alpha(100 - \alpha)(\vartheta - \beta)}, \%, \quad (5.28)$$

де α - вміст нижнього класу у вихідному живленні грохота, % ; β - вміст нижнього класу в надрешітному продукті, % ; ϑ - вміст нижнього класу в підрешітному продукті, % .

Між продуктивністю і ефективністю існує зворотна залежність: якщо перша росте, то друга за інших рівних умов знижується.

Математичне моделювання грохочення

Детерміністська і стохастична моделі процесу грохочення

Процес розділення сипучих матеріалів по крупності на ситових поверхнях об'єднує три етапи, що протікають одночасно:

- доставка прохідної фракції на контакт з ситом;

- проходження зерен прохідної фракції через чарунки сита;
- переміщення шару надрешітного продукту по сити грохота до зони розвантаження.

В останні роки визначилися два основних напрямки математичного опису процесу грохочення:

- детерміністська модель, яка розглядає умови переміщення окремих зерен матеріалу по сити грохота і проходження їх через отвори сита;
- стохастична модель, що представляє процес класифікації як масовий процес з імовірнісним характером руху частинок під дією гравітаційних, інерційних та інших сил.

Детерміністський напрям дозволяє врахувати вплив окремих факторів на результат процесу класифікації в завершальній фазі грохочення - проходження зерен матеріалу через чарунки сита, а також їх вібропереміщення по сити грохота. Крім того, простими і доступними методами можна оцінити вплив сил, що визначають рух окремих частинок.

Стохастична модель на відміну від детерміністської розкриває закономірності руху сукупності зерен матеріалу.

Для теоретичної інтерпретації процесу грохочення використовують поєднання і взаємодоповнення різних моделей – детерміністської та стохастичної. У ряді робіт розглянуто задачу визначення ймовірності проходження окремих зерен матеріалу через чарунки сит різних типів. Встановлено взаємозв'язок ймовірності проходження зерен матеріалу з конструктивними і динамічними параметрами віброгрохота. Відзначено, що на ймовірність проходження найбільшою мірою впливають:

- конструктивні параметри грохота: конструкція просіюючої поверхні, її довжина і кут нахилу до горизонту, гранична крупність розділення;
- динамічні параметри роботи віброгрохота: амплітуда і частота коливань сита, розміри зерен матеріалу, їх співвідношення з розмірами чарунок сита.

Аналіз досліджень детерміністських моделей показав, що вивчення елементарного акту просіювання й процесу вібротранспортування матеріальної частинки корисне для розуміння процесу та встановлення його якісних залежностей. Однак, поширення висновків, отриманих на їх основі, на всю масу матеріалу навряд чи допустиме, тому складність процесу і його залежність від численних факторів і умов не дозволяють створити на цій основі модель, адекватну реальному процесу. На практиці

грохочення і переміщення матеріалу здійснюються у вигляді шару середовища, і залежать не тільки від заданого режиму руху робочого органу, а й від фізичних властивостей матеріалу, виконуваної технологічної операції і т.д.

Стохастична теорія грохочення, запропонована Е.А. Непомнящим, дозволяє врахувати різноманітні чинники, що впливають на ефективність процесу грохочення.

Вважаючи рух частинок прохідної фракції в середовищі великих зерен одномірним марковським процесом, Е.А. Непомнящий для математичного опису процесу грохочення скористався диференціальним рівнянням Колмогорова-Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (5.29)$$

де w - густина розподілу ймовірності зміни положення частинок прохідної фракції; b - параметр хаотичності руху прохідної фракції (є коефіцієнтом дифузії); c - параметр упорядкованості руху частинок прохідної фракції (є коефіцієнтом сегрегації); z - координата частинок в шарі матеріалу від поверхні сита грохота; t - тривалість процесу грохочення.

Досліджуючи рішення рівняння вимушеної дифузії Е.А. Непомнящий отримав вираз для визначення вилучення прохідної фракції в залежності від двох коефіцієнтів - сегрегації c і дифузії b .

У разі рівномірного початкового розподілу частинок прохідної фракції за висотою шару матеріалу вираз для визначення вилучення частинок приймає вигляд:

$$\varepsilon = 1 - a(\tilde{h}) \exp \left(- \frac{\rho(\tilde{h})^2}{4H^2} t \right), \quad (5.30)$$

де $a(\tilde{h})$ - безрозмірний коефіцієнт, що залежить від початкового розподілу частинок у шарі; $\rho(\tilde{h})$ - перший корінь рівняння $\rho(tg\rho) = 2\tilde{h}$; H и \tilde{h} - безрозмірні параметри грохочення:

$$H = \frac{h}{\sqrt{2bt}} = \frac{Q}{3,6B\gamma\sqrt{2BLv_{cp}}}, \quad \tilde{h} = \frac{kh}{b} = \frac{kQ}{3,6bB\gamma v_{cp}}. \quad (5.31)$$

Залежність (5.31) дозволяє зв'язати результати процесу грохочення з продуктивністю грохота по вихідному живленню Q або початковій товщині шару матеріалу h , довжиною L і шириною B просіюючої поверхні, густиною матеріалу γ і середньою швидкістю переміщення матеріалу по сити грохота v_{cp} .

У вдосконаленні стохастичної теорії грохочення важливе місце займає проблема визначення стохастичних коефіцієнтів. Однією з методик є їх визначення на підставі тестових досліджень процесу грохочення, наприклад, за результатами двох дослідів з різною тривалістю вібраційної обробки. Стохастична теорія грохочення отримала розвиток в моделях, запропонованих Надутим В.П. і Лапшиним Є.С.

Сепараційна характеристика як модель процесу грохочення (за О.Н. Тихоновим)

Наближене рівняння сепарації по крупності на ситі з отворами $l_{отв}$ складається при таких допущеннях:

- нехтують силами в зоні над ситом;
- вважають, що над ситом матеріал ідеально перемішаний і гранулометрична характеристика не залежить від координати в шарі, тобто $\gamma(l, x, t) = \gamma(l, t)$;
- швидкість v_c (м/с) просівання зерен нижнього продукту представляють вигляді [18]:

$$v_c(l) = \begin{cases} v_{\max} [1 - (l/l_0)^a] & \text{при } l < l_{отв} \\ 0 & \text{при } l > l_{отв}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Для періодичного грохочення (фіксованої маси матеріалу) позначимо: $\gamma(l, t)$ – гранулометрична характеристика матеріалу над ситом; $m(t)$ – маса матеріалу над 1 м² сита; $h \approx const$ – середня товщина шару матеріалу над ситом. Потік елементарного дрібного класу $[l, l + dl]$ через сито вважають рівним $W(l) = -v_c h^{-1} m \gamma$, тоді рівняння сепарації отримують із закону збереження на границі (на сітці) у вигляді:

$$\partial/(m\gamma)/\partial t = -v_c h^{-1} m \gamma, \quad (5.33)$$

тобто швидкість зменшення маси елементарного класу $[l, l + dl]$ з надрешітного матеріалу пропорційна його масі $m\gamma$ і швидкості просівання і зворотно пропорційна товщині шару h .

Рішення рівняння (5.33) відносно $m\gamma$ має вигляд:

$$m(t)\gamma(l, t) = m_{вих}\gamma_{вих}(l) \exp[-v_c(l)h^{-1}t]$$

і показує зміну маси будь-якого класу $[l, l + dl]$ над ситом з часом грохочення.

Сепараційна характеристика періодичного грохочення буде:

– по надрешітному продукту:

$$\varepsilon_{надp}(l, t) = m(t)\gamma(l, t) / m_{вих}\gamma_{вих}(t) = \exp[-v_c(l)h^{-1}t]; \quad (5.34)$$

– по підрешітному продукту:

$$\varepsilon_{підp}(l, t) = 1 - \exp[-v_c(l)h^{-1}t]; \quad (5.35)$$

Таким чином сепараційна характеристика залежить не тільки від швидкості просівання дрібних класів v_c , але й від часу грохочення.

Для безперервного грохочення в стаціонарному режимі і при тих же допущеннях сепараційні характеристики отримують з попередніх (5.34) і (5.35) заміною змінного часу t на постійний час транспортування:

$$t = L / v_{mp} = M / Q_{mp}, \quad (5.36)$$

де L – довжина грохота; v_{mp} – швидкість транспортування; M – запас матеріалу на грохоті; $Q_{вих}$ – продуктивність по вихідному живленню [18].

Сепараційна характеристика надрешітного продукту для безперервного грохочення в стаціонарному режимі має вигляд:

$$\varepsilon_{надp}(l) = 1 - \exp[-v_c(l)M(hQ_{вих})^{-1}]. \quad (5.37)$$

При зниженні продуктивності $Q_{вих}$ безперервного грохочення до нуля або при збільшенні часу періодичного грохочення до нескінченності сепараційна характеристика наближається до ідеальної.

Для уточнення аналізу протікання процесу грохочення і урахування ефектів сегрегації в шарі над ситом введемо функції $\gamma(l, x, t)$ і $v(l, x, t)$, які залежать від місцеположення x в шарі. При цьому враховуються три сили:

- градієнтна $\vec{F}_{grad} = -\alpha D \gamma^{-1} \partial \gamma / \partial x$;
- опору $\vec{F}_{on} = -\alpha v$;
- сегрегації $F_{segr} = k_{segr} (l - \bar{l})$, де $\bar{l} = \int_0^{l_{max}} l \gamma dl$.

Сила сегрегації сприяє руху крупних частинок $l > \bar{l}$ від сита угору, а дрібних $l < \bar{l}$ – униз до сита.

З використанням закону збереження $\partial \gamma / \partial t = -\partial(\gamma v) / \partial x$ і балансу сил $\sum F_i = 0$ отримують рівняння для функції $\gamma(l, x, t)$ в шарі над ситом:

$$\partial \gamma / \partial t = D \partial^2 \gamma / \partial x^2 + k_{segr} \alpha^{-1} (l - \bar{l}) \partial \gamma / \partial x. \quad (5.38)$$

На відміну від зробленого раніше припущення про ідеальне перемішування в шарі над ситом, рішення рівняння (5.38) показує, що у верхній частині шару переважають крупні зерна, а в нижній – дрібні. Для знаходження функції $\gamma(l, x, t)$ і потім уточненої функції $\mathcal{E}(l)$ рівняння (5.38) вирішують з урахуванням граничних умов на ситі у вигляді (5.32).

5.2.3 Моделювання процесів гідравлічної класифікації

Факторна модель процесу класифікації (в гідроциклоні)

Вхідними факторами процесу класифікації є (рис. 5.11): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад вихідного матеріалу (G_I), навантаження на процес по твердому і воді (G_I, W_I), тиск на вході в гідроциклон (p).

Вихідні фактори: гранулометричний склад продуктів класифікації (G_i) і їхня кількість (G_i) та кількість в них води (W_i).

Основними оперативними керуючими факторами процесу класифікації можуть бути навантаження по вихідному матеріалу і воді (G_1 , W_1), тиск на вході в гідроциклон (p_o).

Фактори, які збурюють процес: гранулометричний склад (G_1) вихідної сировини і розрідженість матеріалу на вході в гідроциклон ($R_1 = W_1/G_1$).

Важливими конструктивними характеристиками гідроциклонів, які впливають на процес і його результати, є: геометричні розміри гідроциклону, його живильного і зливного патрубків та піскової насадки, кут конусності гідроциклону і кут нахилу його осі. Особливо важливою конструктивною характеристикою гідроциклону є розвантажувальне відношення ($d_{\Pi}/d_{зл}$).

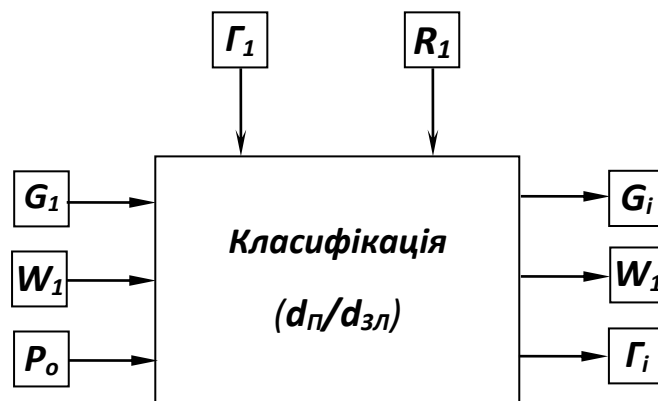


Рисунок 5.11– Факторна модель процесу класифікації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес класифікації.

Гранулометричний склад твердої фази вихідного матеріалу впливає на точність розділення в гідроциклоні. При збільшенні вмісту в живленні зерен, близьких до граничного розміру, взаємне засмічення зливу і пісків суміжними класами збільшується.

Вміст твердого у вихідній пульпі впливає на крупність і розрідженість продуктів розділення. Одержання тонких зливів можливе лише при досить низьких вмістах твердого у вихідній пульпі. У протилежному випадку крупність зливу зростає внаслідок збільшення в'язкості і густини пульпи в гідроциклоні. Крім того, підвищення вмісту

твердого в пульпі спричиняє збільшення навантаження на піскову насадку, яка може не забезпечити вивантаження пісків, що призведе до порушення процесу розділення.

Тиск p_0 на вході в гідроциклон для одержання задовільних результатів розділення повинен бути постійним і досить високим. При заданій об'ємній продуктивності він визначається головним чином розмірами зливного $d_{зл}$ і живильного $d_{ж}$ отворів. Підвищення тиску сприяє зменшенню граничної крупності розділення і одержанню більш дрібних зливів. При одержанні грубих зливів допускається робота гідроциклона з тисками 0,05 МПа, при одержанні тонких зливів – не менше 0,2 МПа.

Геометричні розміри гідроциклона, його живильного і зливного патрубків та піскової насадки взаємозв'язані і від співвідношення між ними залежать продуктивність апарата і ефективність процесу класифікації.

Кут конусності гідроциклона визначає його об'єм і час перебування в ньому матеріалу. Зі збільшенням кута конусності збільшується крупність класифікації, зменшуються вихід пісків і об'ємна продуктивність.

Кут нахилу осі гідроциклона до горизонту порівняно мало впливає на його роботу. Встановлення гідроциклонів великих розмірів в нахиленому і навіть в горизонтальному положенні (при малих тисках на вході) іноді позитивно впливає на рівномірність протіканню процесу і, відповідно, на технологічні показники.

Розвантажувальне відношення $d_{п} / d_{зл}$, тобто відношення діаметра піскової насадки до діаметра зливного патрубка є основним чинником, що визначає показники роботи гідроциклона. Зі збільшенням розвантажувального відношення збільшується вихід пісків, знижується їх крупність і вміст твердого, відповідно до цього змінюється характеристика зливу. Ефективність класифікації досягає максимуму при оптимальному розвантажувальному відношенні, що складає 0,3 – 0,5. Якщо зміна розвантажувального відношення створюється за рахунок зміни діаметра піскової насадки, то при постійному тиску на вході продуктивність гідроциклона змінюється мало, якщо ж за рахунок діаметра зливного патрубка, то продуктивність змінюється прямо пропорційно цьому діаметру.

Математичне моделювання процесу гідравлічної класифікації

Найбільш плідними з т. з. моделювання гідравлічної класифікації є праці О. Н. Тихонова [18], В. Г. Левіна [26] та В. І. Кривошекова. Розглянемо їх докладніше.

Моделі О. Н. Тихонова [18] були створені у 1980-тих роках і містять, на нашу думку, ряд недостатньо обґрунтованих тверджень, зокрема, оперування потенціальними силами, які залежать від місця розташування частинок, обумовлюючи їх рух у просторі. Попри це моделі О. Н. Тихонова зберігають свою цінність до сьогодні.

Класифікація у висхідному потоці з нестисненими умовами [18].

Класифікатори, згущувачі, гідроциклони сепарують частинки, які відрізняються крупністю l і густиною ρ .

Розглянемо випадок при $\rho = const$ і $l = var$, тобто модель класифікаційного стовпчика для нестиснених умов класифікації частинок по крупності. У стовпчик знизу подається вода, яка підіймається угору із швидкістю $v_{сер}$; крупні частинки $l > l_p$ рухаються униз в напрямку x , а дрібні $l < l_p$ – угору. Враховуємо три сили: гравітаційну $\vec{F}_{грав}$, архімедову \vec{F}_A (вона може бути "гравітаційною" $\vec{F}_{\vec{a}-\vec{A}}$ і "відцентровою" $\vec{F}_{\vec{a}\ddot{o}-\vec{A}}$ - залежно від поля сил), в'язкого тертя (стоксову) \vec{F}_{Cm} ; для нестиснених умов об'ємна частка твердого мала, тобто $m(x, t) \rightarrow 0$, і тому сила опору руху частинки з боку твердої фази $\vec{F}_{onip} = 0$.

Основні рівняння збереження і балансу сил приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \partial(m\gamma)/\partial t &= -\partial(m\gamma)/\partial x + W; \\ g\rho - g\rho_{сер} - \alpha_c(v - v_{сер})/l^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

де $\alpha_c = 18\mu$; μ – динамічна в'язкість середовища. Функція джерела W характеризує потік і склад живлення:

$$W(l, x, t) = q_{вих}(x, t)m_{вих}(x, t)\gamma_{вих}(l, t), \quad (5.40)$$

де $q_{вих}$ – питома продуктивність по живленню, яка дорівнює сумарному об'єму матеріалу і середовища, що підводиться в одиницю часу в одиниці

об'єму в точці (x, t) , с^{-1} ; $m_{\text{вих}}$ – масова (або об'ємна) частка твердого в матеріалі, що підводиться; $\gamma_{\text{вих}}$ – диференційна характеристика крупності живлення, мм^{-1} .

Рішення рівнянь (5.40) прогнозує концентрації вузьких класів $\gamma(l, x, t)dl$ і твердого у цілому $m(x, t)$. У загальному випадку для нестационарного режиму в аналітичному вигляді рівняння буде мати вигляд:

$$m\gamma = \Gamma_{\text{поч}}(x - vt, l) + \int_0^t W[l, x - (t - \tau)v, \tau] d\tau, \quad (5.41)$$

де $\Gamma_{\text{поч}}(x, t) = m(x, 0)\gamma(l, x, 0)$ – початковий розподіл частинок по простору робочої зони при $t = 0$; $v = v_{\text{сер}} + g\alpha_c^{-1}(\rho - \rho_{\text{сер}})l^2$ – швидкість частинок відносно стінок апарата, м/с .

Практичне застосування цього рішення можливе при заміні у відомих функціях $\Gamma_{\text{поч}}(l, x)$ і $W(l, x, t)$ координати x відповідно на різності $x - vt$ і $x - (t - \tau)v$, після чого їх підставляють у рівняння (5.41) і отримують функцію $\Gamma(l, x, t) = m\gamma$. Далі відомий добуток $\Gamma = m\gamma$ у відповідності з властивостями нормування γ – функції розбивають на шукані співмножники:

$$m(x, t) = \int_0^{l_{\text{max}}} \Gamma(l, x, t) dl; \quad \gamma(l, x, t) = \Gamma(l, x, t) / m(x, t). \quad (5.42)$$

З апарату виводяться продукти: верхній $l < l_p$ і нижній $l > l_p$ при цьому $l_p = \sqrt{\alpha_c v_{\text{сер}} / g(\rho - \rho_{\text{сер}})}$ знаходиться з умови (5.39). З отриманого рішення $m(x, t)$ і $\gamma(l, x, t)$ можна прогнозувати характеристики обох продуктів за формулами:

$$V_{\text{ниж}}(t) = S \int_{x_{\text{дно}}}^{\infty} m(x, t) dx;$$

$$Q_{\text{ниж}}(t) = dV_{\text{ниж}} / dt;$$

$$\gamma_{ниж}(l, t) = \gamma(l, x_{дно}, t), \quad (5.43)$$

де $V_{ниж}(t)$ – сумарний об’єм осаду, який накопичився в нижньому продукті до моменту часу t , м³; S – площа перетину апарата, м²; $x_{дно}$ – координата розвантажувальної частини апарата, м; $Q_{ниж}(t)$ – об’ємна продуктивність по твердому в нижній продукт, м³/с; $\gamma_{ниж}(l, t)$ – диференційна характеристика крупності нижнього продукту, що вивантажується з апарата в поточний момент часу t , мм⁻¹.

Для верхнього продукту справедливі аналогічні формули.

Сепараційна характеристика для стаціонарного режиму при $\partial(m\gamma)/\partial t = 0$ має ступінчастий ідеальний характер:

$$\varepsilon_{ниж}(l) = 1(l - l_p). \quad (5.44)$$

Таке ідеальне розділення по крупності є результатом нестисненого руху зерен.

Якщо в живленні класифікаційного апарата крупність l і густина ρ є величинами змінними, усі формули (5.39) – (5.43) залишаються справедливими при заміні $\gamma \rightarrow \gamma(l, \rho, x, t)$; в формулі (5.42) для $m(x, t)$ необхідно додати інтегрування по ρ .

Двомірною сепараційною характеристикою має ступінчастий ідеальний характер з граничною лінією φ_p (рис. 5.12):

$$\varepsilon_{ниж}(\rho, l) = \begin{cases} 1 & \text{для зони } D_1; \\ 0 & \text{для зони } D_2. \end{cases} \quad (5.45)$$



Рисунок 5.12 – Границя розділення апарата з висхідним потоком.

Таким чином, класифікаційний апарат може розділяти сировину по двох фізичних властивостях: крупності частинок l і їх густині ρ . Положення граничної лінії $\varphi_p = g(\rho - \rho_{сер}) - \alpha_c v_{сер} / l^2$ можна змінювати варіюванням $\rho_{сер}$, $v_{сер}$ і α_c .

Врахування стиснення при класифікації [18]

Стиснення при класифікації враховується введенням градієнтної сили $\vec{F}_{\vec{a}\partial\vec{a}\vec{a}}$, в результаті чого рівняння руху частинок змінюється таким чином:

$$\sum F_i = g(\rho - \rho_{сер}) - \alpha_c l^{-2}(v - v_{сер}) - k_{град}(l)\gamma^{-1} grad\gamma = 0;$$

$$\partial(m\gamma)/\partial t = -\partial(m\gamma)/\partial x + W. \quad (5.46)$$

Зауважимо, що тут імовірно коректним буде визначення $\vec{F}_{град}$ як сили турбулентної дифузії за В. Г. Левічем.

При $m = const$, що можна допустити для механічних спіральних класифікаторів, отримуємо:

$$\partial\gamma/\partial t = D\partial^2\gamma/\partial x^2 - A\partial\gamma/\partial x + W,$$

де $D = k_{\text{зад}}(l)l^2 / \alpha_c$; $A = -v + g(\rho - \rho_{\text{сеп}})l^2 / \alpha_c$.

Двомірна сепараційна характеристика по ρ і l має вигляд:

$$\varepsilon_{3l}(\rho, l) = \frac{\exp(AD^{-1}x_p) - \exp(AD^{-1}x_{\text{верх}})}{\exp(AD^{-1}x_{\text{дно}}) - \exp(AD^{-1}x_{\text{верх}})}; \quad (5.47)$$

При $x_p = 0,5(x_{\text{дно}} - x_{\text{верх}}) = 0,5h$ рівняння (5.47) має вигляд:

$$\varepsilon_{3l}(\rho, l) = 0,5 - 0,5thAh(4D)^{-1}. \quad (5.48)$$

Гранична лінія має той же вигляд $\varphi_p = g(\rho - \rho_{\text{сеп}}) - \alpha_c v_{\text{сеп}} / l^2 = 0$ (див. рис. 5.12), але сепараційна характеристика відхиляється від ідеальної ступінчастої. При $\rho = \rho_0 = \text{const}$ з рівняння (5.48) отримуємо неідеальну сепараційну характеристику по крупності:

$$\varepsilon_{3l}(l) = 0,5 - 0,5th[ha(4D)^{-1}(l^2 - l_p^2)], \quad (5.49)$$

де $a = g\alpha_c^{-1}(\rho_0 - \rho_{\text{сеп}})$; $l_p = \sqrt{v_{\text{сеп}} / \alpha}$ – крупність розділення. Закон гіперболічного тангенса для сепараційної характеристики класифікації в стиснених умовах задовільно апроксимує експериментальні криві $\varepsilon_{3l}(l)$.

При значному стисненні в рівняннях сепарації (5.46) необхідно додатково враховувати ще й силу опору $\vec{F}_{\text{опір}} = -\alpha\vec{v}$ і, можливо, ще й гравітаційну архімедову силу $\vec{F}_{\text{с-А}} = 0$.

Класифікація в гідро циклоні [18].

В гідроциклонах також здійснюється сепарація по крупності l і густині ρ в стиснених умовах (рис. 5.13). Основна відмінність полягає в наявності відцентрової сили $\vec{F}_{\text{вц}}$ (радіальна складова сили інерції) і відповідно середньостатистичної відцентрової архімедової сили $\vec{F}_{\text{вц-А}}$.

Сила $\vec{F}_{вц}$ направлена по радіусу обертання до стінки гідроциклону і притискає до неї частинки, в результаті чого на стінці утворюється природна постіль. В постелі сила $\vec{F}_{вц-A}$ відштовхує від стінки легкі частинки, які потрапляють в злив. Крім того, потік середовища відбивається від стінки з швидкістю $v_{сер}$, що завдяки силі тертя (опору) $\vec{F}_{опір}$ сприяє вилученню дрібних частинок з постелі в злив. Крупні і важкі частинки залишаються притиснутими до стінки силою $\vec{F}_{вц}$ і потрапляють у піски. Внаслідок стиснення в гідроциклоні діє ще й градієнтна сила $\vec{F}_{град}$. Таким чином, крупні частинки, для яких $\vec{F}_{вц} > \vec{F}_{вц-A} + \vec{F}_{опір}$ осідають на дно постелі і потім у піски, а дрібні, для яких $\vec{F}_{вц} < \vec{F}_{вц-A} + \vec{F}_{опір}$ потрапляють у верхню частину постелі і потім в злив. Сепараційна характеристика $\varepsilon_{зл}(l, \rho)$ в результаті стиснення і наявності $\vec{F}_{град}$ буде неідеальною [16, 18].

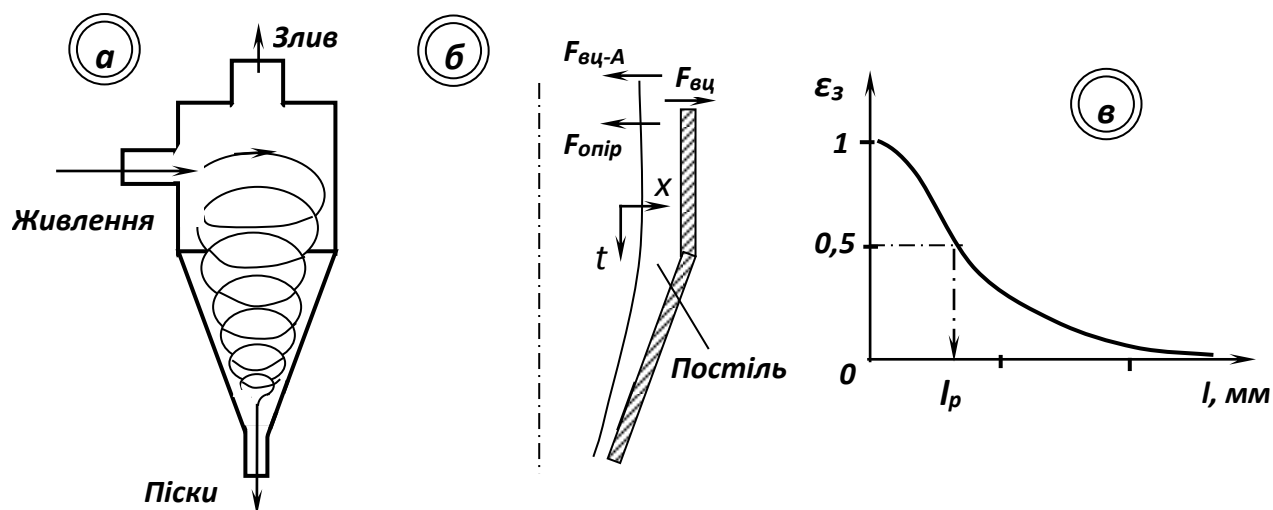


Рисунок 5.13 - Гідроциклон (а), пристінна постіль (б), сепараційна характеристика (в).

Вісь гідроциклону може бути вертикальною або нахиленою, але якісна картина сепарації залишається. Враховуючи, що напрямок сепарації x перпендикулярний до стінки, тривалість сепарації $t = y / v_{mp}$ відповідає

руху матеріалу по стінці від завантаження до розвантаження пісків, рівняння сепарації (закон збереження і баланс сил) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \partial(m\gamma)/\partial t &= -\partial(m\gamma v_x)/\partial x; \\ a_{\text{вц}}[\rho - \bar{\rho}(x,t)] - \alpha_{\text{онір}}(l)(v_x - v_{\text{сер}}) - k_{\text{град}}(l)\gamma^{-1}\partial\gamma/\partial x &= 0, \end{aligned} \quad (5.50)$$

де $m = m(x,t)$ – частка твердого в пульпі в точці (x,t) , $m \approx \text{const}$; $\gamma = \gamma(l, \rho, x, t)$ – функція фракційного складу в точці (x,t) ; $v_x = v_x(l, \rho, x, t)$ – середня швидкість частинки (l, ρ) в точці (x,t) в напрямку сепарації x , м/с; $a_{\text{вц}}\rho = v_{\text{окр}}^2 R^{-1}\rho = F_{\text{вц}}$ – відцентрова сила, Н/м³; $-a_{\text{вц}}\bar{\rho} = F_{\text{вц}-A}$ – відцентрова архімедова сила, Н/м³; $\bar{\rho} = (1-m)\rho_{\text{сер}} + m \iint_D \rho \gamma d\rho dl$ – середня густина постелі в точці (x,t) , т/м³; $\alpha_{\text{онір}}(l) \approx \alpha_c l^2$ – коефіцієнт внутрішнього тертя (опору), с/м²; $v_{\text{сер}} = Q_{\text{вих}}/S$ – середня радіальна швидкість відтоку пульпи від стінки (м/с), яка дорівнює відношенню об'ємного потоку пульпи в гідроциклон $Q_{\text{вих}}$ (м³/с) до площі бокової поверхні S (м²); $k_{\text{град}}(l)$ – коефіцієнт градієнтної сили, Н/м³.

Для знаходження $\gamma = \gamma(l, \rho, x, t)$ необхідно врахувати граничні умови у вигляді $v_x(l, \rho, x_{\text{дно}}, t) = v_x(l, \rho, x_{\text{верх}}, t) = 0$. Для отримання простого рішення припустимо, що $m = \text{const}$ і $\bar{\rho} = \rho_{\text{пульпи}} = \text{const}$, тоді вихідні рівняння перетворюються до вигляду:

$$\partial\gamma/\partial t = D\partial^2\gamma/\partial x^2 - A\partial\gamma/\partial x.$$

При достатньо великій тривалості сепарації T загальне рішення рівняння має вигляд:

$$\gamma_{\text{рез}}(l, \rho, x, T) = \frac{AD^{-1}h\gamma_{\text{вих}}(l, \rho)\exp(AD^{-1}x)}{\exp(AD^{-1}x_{\text{дно}}) - \exp(AD^{-1}x_{\text{верх}})},$$

де $A = -v_{сер} + a_{вц}(\rho - \rho_{нульни}) / \alpha_{онир}(l)$ – коефіцієнт «знесення» (м/с), який залежить від l і ρ частинок і дорівнює швидкості частинок при відсутності градієнтної сили ($k_{зпад} = 0$); $h = x_{дно} - x_{верх}$ – товщина постелі, м; $D = k_{зпад}(l) / \alpha_{онир}(l)$ – коефіцієнт дифузії, м²/с. Швидкість середовища спрямована проти x , тому $v_{сер}$ негативна. При цих допущеннях сепараційна характеристика гідроциклону:

$$\varepsilon(l, \rho) = \frac{\exp(AD^{-1}x_p) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}{\exp(AD^{-1}x_{дно}) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}. \quad (5.51)$$

Величина x_p визначається відношенням потоків зливу $Q_{зл}$ і пісків Q_n :

$$x_p \approx x_{верх} + (x_{дно} - x_{верх})Q_{зл} / (Q_n + Q_{зл}).$$

Якщо розділення продуктів відбувається в середині шару при $Q_n = Q_{зл} = 0,5Q_{вих}$ і $x_p = x_{верх} + 0,5(x_{дно} - x_{верх})$, то отримують більш просту формулу:

$$\varepsilon(l, \rho) = 0,5 - 0,5thAh(4D)^{-1}. \quad (5.52)$$

В окремому випадку сировини з частинками постійної густини $\rho = \rho_0 = const$ гідроциклон працює як класифікатор по крупності l . Одномірна сепараційна характеристика при стоксовому опорі і x_p в середині постелі приймає вигляд:

$$\varepsilon_{зл}(l) = 0,5 - 0,5th[hb(4D)^{-1}(l^2 - l_p^2)], \quad (5.53)$$

де $b = a(\rho_0 - \rho_{нульни}) / \alpha_c$; $l_p = \sqrt{v_{сер} / b}$ – крупність розділення.

У окремому випадку вузько класифікованого живлення $l = l_0 = const$ гідроциклон працює як сепаратор по густині з характеристикою:

$$\varepsilon_{зл}(\rho) = 0,5 - 0,5th[ha_{вц}l_0^2(\rho - \rho_p) / \alpha_c], \quad (5.54)$$

де $\rho_p = \rho_{\text{пультни}} + v_{\text{сер}} \alpha_c / (a_{\text{вц}} l_0^2)$ – густина розділення.

Величини крупності розділення l_p і густини розділення ρ_p в формулах (5.53) і (5.54) для ε_{3l} визначені для випадку $Q_n = Q_{3l}$, тобто x_p знаходиться у середині постелі. Для загального випадку $Q_n \neq Q_{3l}$ слід використовувати формулу (5.51) за умови $\varepsilon(l, \rho) = 0,5$.

Отже, для моделювання процесу класифікації в гідроциклоні рекомендується застосовувати вирази (5.51) і (5.52).

Моделі П. І. Пілова. Виходячи з уявлень про комплексний вплив на групу частинок, що рухаються у гідросуміші і суспензії, ефектів викликаних збільшенням локальних градієнтів швидкості і тиску дисперсного середовища при обтіканні окремих частинок та їх груп, автором одержано ряд базисних виразів, які можуть бути використані при моделюванні гідравлічної класифікації [27].

Для гідравлічної класифікації у висхідному потоці П.І.Піловим одержана така сепараційна характеристика:

$$\varepsilon = \xi_c \exp\left(-\int \frac{v - v_y}{D} dy\right)_{|y=h}$$

де ξ_c – об’ємна частка суспензії, яка видаляється у злив; h – глибина введення вихідної суспензії; ε – частка частинок, що вилучаються у злив, які відносно середовища мають швидкість v ; D – коефіцієнт турбулентного переносу рідкої фази.

Параметр D може бути визначений з такого виразу:

$$D = \frac{D^1 k v}{1 - e^{-k v}},$$

де k – параметр, який характеризує турбулентну течію рідини; D^1 – коефіцієнт турбулентного перенесення твердої фази.

Для гідравлічної класифікації у тонкошарових потоках одержана сепараційна характеристика:

$$\varepsilon = \xi_c e^{-p t_n} + v \frac{1 - e^{-p t_n}}{h_d p} \frac{Z^m}{2} \left[\frac{1 - (1 - \xi_c)^{1-m}}{1 - m} + \frac{1 - Z^{m+1}}{m + 1} \right],$$

де $m=v/k_t u_c$; $Z = 2\lambda/h$; t_n – час перебування суспензії (гідросуміші) в зоні розділення; h_d – товщина потоку суспензії, який утворює піски; k_t – коефіцієнт, який характеризує турбулентність суспензії; u_c – середня швидкість суспензії вздовж каналу; h – товщина потоку, яка дорівнює відстані між сусідніми площинами, які утворюють канали; λ – товщина ламінарного підшару.

П.І.Піловим одержана також сепараційна характеристика гідравлічної класифікації у гідроциклонах, яка в узагальненому вигляді може бути представлена рівнянням:

$$\varepsilon = [1 + V_{p-z} \exp f(G, F)]^{-1},$$

де V_{p-z} – співвідношення витрат суспензії в піски та злив; $f(G, F)$ – функція, яка залежить від геометричних розмірів гідроциклона та параметрів течії пульпи.

5.3 Моделювання основних процесів збагачення корисних копалин

5.3.1 Моделювання гравітаційних процесів

5.3.1.1 Моделювання процесу відсадки

Факторна модель процесу відсадки

Вхідними факторами процесу відсадки є (рис. 5.14): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу (G_I, Φ_I), навантаження на процес по твердому (G_I).

Вихідні фактори: вихід продуктів (γ_i) і їхня якісна характеристика (наприклад, при відсадці вугілля – зольність (A_i)).

Основними оперативними керуючими факторами процесу відсадки є навантаження по вихідному матеріалу (G), витрата транспортної і підRESHITNOЇ води (W_m, W_n), витрата повітря (w), швидкість обертання роторного розвантажувача (n_p), частота і амплітуда пульсацій постелі (f, a). Важливими *проміжними факторами* можна розглядати розпушеність і висоту постелі (R_n, H_n).

Фактори, які збурюють процес: якість (наприклад, зольність) вихідного матеріалу (A_e) гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу (Γ_1 , Φ_1), крупність (d), форма (k) зерен і їх міцність (m).

Важливими конструктивними характеристиками відсадки, які впливають на процес і його результати, є: розмір площі відсаджувального решета, спосіб створення пульсацій і спосіб розвантаження важких продуктів.

Важливою технологічною характеристикою відсадки є питома продуктивність (q).

Розглянемо вплив цих факторів на процес відсадки.

Технологічні результати відсадки характеризуються взаємним засміченням кінцевих продуктів збагачення, а також показниками технологічної ефективності – середнім ймовірним відхиленням E_{pm} і погіршністю розділення I .

Гранулометричний склад вихідного матеріалу визначає структуру постелі відсаджувальної машини. Зі зменшенням крупності збагачуваного матеріалу підвищується гідродинамічний опір постелі, внаслідок чого знижуються ефективність і точність розділення матеріалу.

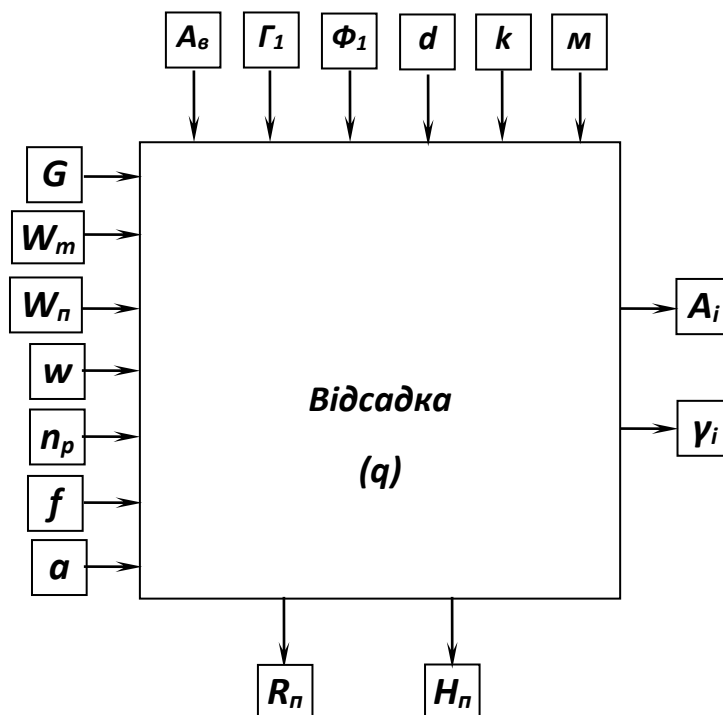


Рисунок 5.14 – Факторна модель процесу відсадки

Технологічна ефективність відсадки особливо залежить від вмісту в живленні шламів, які не збагачуються, а практично повністю переходять в легкий продукт. Розмір максимальної грудки збагачуваного матеріалу обмежений конструктивними особливостями відсаджувальних машин (головним чином конструкцією розвантажувальних пристроїв). Для більшості відсаджувальних машин максимальний розмір зерен не перевищує 100 – 150 мм.

Наявність у збагачуваному матеріалі зерен плоскої форми приводить до зниження пропускної здатності постелі і погіршення ефективності розділення. При збагаченні вугілля плоскі частинки породи виносяться висхідним потоком в концентрат і знижують його якість.

Низька міцність зерен збагачуваного матеріалу сприяє його ошламлюванню, що ускладнює процес відсадження (шлами в незбагачуваному стані переходять в легкий продукт).

Товщина постелі на решеті відсаджувальної машини залежить від крупності збагачуваного матеріалу. При збагаченні крупних класів вугілля товщина постелі, як правило, дорівнює 350 – 400 мм, при збагаченні дрібних класів – 250 – 350 мм.

Фракційний склад вихідного матеріалу характеризує його збагачуваність. Чим вище вміст в збагачуваному матеріалі проміжних фракцій (зростків), тим нижча ефективність процесу відсадки. Підвищення вмісту важких фракцій у вихідному матеріалі сприяє підвищенню якості важкого продукту і погіршенню якості легкого продукту, і навпаки.

Питома продуктивність відсаджувальних машин визначається за нормами навантаження на 1 м² решета. Вона обумовлена низкою факторів (тому і показана у факторній моделі як інтегруюча характеристика), зокрема фізичними властивостями і крупністю вихідного матеріалу, вимогами до якості кінцевих продуктів, конструктивними особливостями відсаджувальних машин та ін. Зі збільшенням питомої продуктивності знижується ефективність збагачення, що пов'язано зі зменшенням часу перебування матеріалу в робочій камері відсаджувальної машини. При низькій питомій продуктивності технологічні показники теж погіршуються внаслідок значного збільшення вмісту легких фракцій у важких продуктах відсадки, тому що неможливо постійно підтримувати необхідну товщину постелі.

Цикл відсадки характеризується частотою коливань середовища, тривалістю його підйому, опускання і паузи між ними. Сукупність

параметрів повітряного циклу обумовлює динамічний режим розпушення постелі, який характеризується такими вихідними гідродинамічними параметрами: амплітудою пульсацій, максимальним підйомом постелі, максимальною швидкістю висхідного і низхідного потоків, критерієм розпушеності.

На *розпушення постелі* суттєво впливає частота пульсацій і тиск повітря. При доброму розпушенні постелі збільшується продуктивність відсаджувальної машини. Однак при великих швидкостях руху води дрібні зерна важкого продукту можуть виноситися у верхні шари постелі, а зерна плоскої і неправильної форми, що мають великий коефіцієнт опору, затримуються у верхніх шарах постелі. При недостатньому розпушенні постелі умови її розшарування погіршуються внаслідок високого механічного опору постелі руху в ній зерен, особливо крупних. Продуктивність відсаджувальної машини знижується.

Частота і амплітуда пульсацій води визначають швидкісний режим висхідних і низхідних потоків у відсаджувальній машині, який обумовлює розпушення і висоту підйому мінеральних зерен над решетом.

При виборі частоти і амплітуди пульсацій води повинні бути враховані максимальний розмір, густина і гранулометричний склад зерен збагачуваного матеріалу, вміст легких і важких фракцій, товщина постелі, а також вимоги до якості продуктів відсадки.

Зі збільшенням крупності зерен збагачуваного матеріалу швидкість руху пульсуючої води повинна збільшуватись, що досягається збільшенням амплітуди пульсацій. Амплітуду пульсацій також збільшують при збільшенні товщини постелі і при великому вмісті важкого продукту в збагачуваному матеріалі. Частоту пульсацій зі збільшенням крупності зерен знижують.

Витрата і тиск повітря – фактори грубого регулювання процесу відсадки.

Витрата повітря, що подається в машину, впливає на амплітуду пульсацій води. При збільшенні гідравлічного опору постелі витрата повітря повинна бути збільшена.

Зі збільшенням *тиску повітря* майже пропорційно збільшуються швидкість висхідного потоку і амплітуда пульсацій, в більшій мірі – швидкість низхідного, висота підйому і розпушеність постелі. Змінюючи тиск у повітряних камерах відсаджувальних машин в різні періоди циклу можна впливати на динаміку розпушення постелі.

Підрешітна вода служить фактором оперативного (і більш тонкого) регулювання відсадки шляхом підтримки раціонального розпушення відсаджувальної постелі. При цьому розпушеність постелі залежить від змін тиску більшою мірою, ніж від витрати підрешітної води.

Зниження витрати підрешітної води приводить до зменшення амплітуди пульсацій, підйому постелі, її розпушення і швидкостей висхідного і низхідного потоків. Зменшення вихідних гідродинамічних параметрів відсадки, зокрема амплітуди пульсацій, приводить до зниження рівня зливу води через зливний поріг відсаджувальної машини.

Витрата транспортної води впливає і на тривалість перебування збагачуваного матеріалу у відсаджувальній машині. При великій витраті транспортної води зменшується ефективність процесу, але збільшується продуктивність.

Розрідженість живлення не повинна перевищувати $1 - 2 \text{ м}^3/\text{т}$. У протилежному випадку у відсаджувальній машині створюється горизонтальний потік, що замутиє шар матеріалу, який знаходиться над важкою постіллю, і порушує в ньому розшарування частинок.

Тип відсаджувальної машини визначається видом збагачуваної сировини, крупністю живлення і вимогами до продуктів збагачення. В свою чергу тип відсаджувальної машини визначає *спосіб створення пульсацій у відсаджувальній камері*.

Число камер відсаджувальної машини залежить від необхідного числа продуктів розділення і їх якості.

Спосіб розвантаження важких продуктів теж впливає на кінцеву ефективність розділення у збагачувальному апараті. Розвантажувальні пристрої повинні забезпечити видалення з машини такої кількості важких продуктів, яка надходить з вихідним матеріалом, і при цьому не порушувати досягнутого розшарування постелі.

Оцінка ефективності процесу відсадки здійснюється за величиною коефіцієнта погрішності I .

Зазначимо, що для вивантаження дрібних зерен важкої фракції особливе значення мають параметри штучної постелі або шару важкої фракції звичайної відсаджувальної постелі.

Феноменологічна модель процесу відсадки

Феноменологічна модель процесу відсадки наведена на рис. 5.15.

Субпроцес 1 «*Підготовка матеріалу*» включає процеси знешламлення корисної копалини, підготовленої в необхідному для процесу відсадки діапазоні крупності, і додання транспортної води для її переміщення уздовж відсаджувальної машини.

Субпроцес 2 «*Розпушення постелі*» – необхідна умова для здійснення процесу відсадження. Завдяки періодичній подачі пульсаторами стисненого повітря матеріал на решеті відсаджувальної машини поперемінно (у відповідності до відсаджувального циклу) розпушується і ущільнюється. Тим самим створюються умови для розшарування корисної копалини за густиною.

Субпроцес 3 «*Розшарування матеріалу за густиною*» відбувається в залежності від їхньої густини, крупності і форми зерен. Процес відсадки здійснюється в результаті розшарування суміші мінеральних частинок за густиною в знакоперемінному вертикальному водному потоці, пульсуючому з заданими амплітудою і частотою. Необхідні умови процесу відсадки забезпечуються подачею у відсаджувальну машину стисненого повітря, транспортної і підрешітної води. В результаті багаторазових пульсацій збагачуваний матеріал розшарується (стратифікується) на легкий (верхній шар) і важкий (нижній шар) продукти, зростки виділяться у вигляді промпродукту.

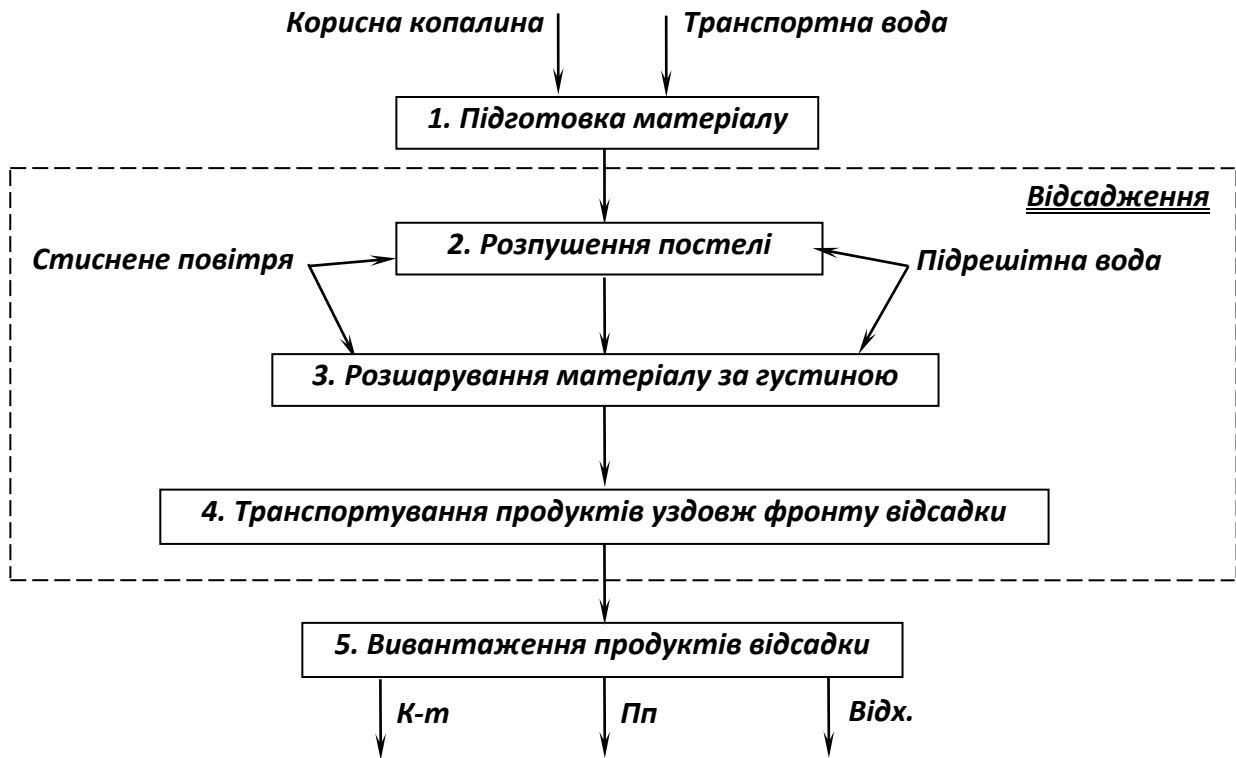


Рисунок 5.15 – Феноменологічна модель процесу відсадки.

Субпроцес 4 «**Транспортування продуктів уздовж фронту відсадки**». Транспортування продуктів відсадки у подовжньому напрямку відбувається одночасно з розпушенням постелі і розшаруванням матеріалу. Подовжнє транспортування впливає на розділення частинок як внаслідок різниці в швидкості руху шарів постелі, розташованих на різній відстані від решета, так і завдяки перемішуванню частинок (особливо дрібних) потоками транспортної води.

Субпроцес 5 «**Вивантаження продуктів відсадки**». Вивантаження дрібних важких продуктів (промпродукту і відходів) здійснюється через постіль і решето, крупних – через розвантажувальні кармани із розвантажувальними пристроями різних конструкцій і далі зневоднюючими елеваторами. Легкий продукт (концентрат) вивантажується самопливом через зливний поріг в кінці відсаджувальної машини.

Математичне моделювання відсадки

Прикладом математичного моделювання процесу відсадки можуть служити гіпотези: швидкісна (прискорень), суспензійна, енергетична і статистична.

Швидкісна гіпотеза оснований на функціональній залежності швидкості падіння окремого зерна в стиснених умовах від його розміру, форми, густини і т.д. Сутність цієї гіпотези полягає у тому, що внаслідок різниці у швидкості і прискорення частинок різної густини під дією вертикального потоку води, вони проходять різні шляхи і в результаті цього й відбувається розділення за густиною.

З урахуванням маси частинки і сил, що діють при її русі, прискорення частинки визначається як

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\delta - \Delta}{\delta} \cdot g \pm \frac{6\psi_{cm}}{\pi d \delta} \cdot (u \pm V)^2 \Delta, \text{ м/с.} \quad (5.55)$$

де d – діаметр частинки, м; u – швидкість вертикального потоку води, м/с; V – швидкість частинки, м/с; δ, Δ – густина частинки і води, кг/м³; g – прискорення вільного падіння, м/с²; ψ_{cm} – коефіцієнт гідродинамічного опору середовища при русі частинки.

З рівняння (7.3) видно, що прискорення частинки змінне і залежить від її густини, розміру і швидкості.

Недолік цієї гіпотези полягає у тому, що вона розглядає рух окремої частинки і не враховує імовірнісні явища, що мають місце при масовому русі зерен, які утворюють шар постелі.

Суспензійна гіпотеза уподібнює розділення зерен у відсаджувальній машині розшаруванню за густиною в мінеральній суспензії, при цьому припускають, що суспензію змінної густини утворюють постіль разом з водою.

Густина середовища визначається як середньозважене значення густини суміші рідини і твердого:

$$\Delta_c = \Theta \Delta + (1 - \Theta) \delta_{cp}, \text{ кг/м}^3, \quad (5.56)$$

де $\Delta_c, \Delta, \delta_{cp}$ – відповідно густина середовища, рідини і середньодинамічна твердих частинок постелі, кг/м³; Θ – коефіцієнт розпушення постелі.

Гіпотеза не враховує дію динамічних сил при пульсації постелі. Крім того, постіль складається з крупних частинок і її не можна розглядати

як важку суспензію, а також густина суспензії є величиною змінною і залежить від розпушеності постелі.

Енергетична гіпотеза розглядає відсаджувальну постіль як замкнену механічну систему, що знаходиться в нестійкій рівновазі в полі сили тяжіння, і яка прагне перейти до більш стійкого стану з мінімумом потенційної енергії (другий закон термодинаміки). Розділення матеріалу за густиною відбувається за рахунок внутрішньої енергії мінеральної суміші.

$$E_I = (G_I + G_2) \cdot \frac{h_I + h_2}{2}, \text{ Дж}, \quad (5.57)$$

Де $G_I = (1 - \Theta) F h_I \delta_I g$ – сила ваги легких частинок густиною δ_I , Н;

$G_2 = (1 - \Theta) F h_2 \delta_2 g$ – сила ваги важких частинок густиною δ_2 , Н;

F – площа поперечного перетину стовпа постелі, м²; h_I і h_2 – висота стовпа постелі, м; Θ – коефіцієнт розпушення.

При розпушенні такої системи під дією пульсацій води положення мінеральних зерен різної густини, що мають різний запас потенційної енергії, упорядковується, постіль розшаровується за густиною, запас потенційної енергії системи після розшарування зменшується:

$$\Delta E = \frac{1}{2} (G_2 h_I - G_I h_2) = (1 - \Theta) \frac{F h_I h_2 g}{2} (\delta_2 - \delta_I), \text{ Дж}. \quad (5.58)$$

де $G_I = (1 - \Theta) F h_I \delta_I g$ – сила ваги легких частинок густиною δ_I , Н;

$G_2 = (1 - \Theta) F h_2 \delta_2 g$ – сила ваги важких частинок густиною δ_2 , Н;

F – площа поперечного перетину стовпа постелі, м²;

h_I і h_2 – висота шарів постелі після розшарування, м;

Θ – коефіцієнт розпушення;

δ_I, δ_2 – густини поділюваних мінералів (при цьому $\delta_2 > \delta_I$).

Відповідно до другого закону термодинаміки будь-яка система прагне перейти в положення з мінімумом потенційної енергії, тобто в даному випадку розділитися на шари різної густини.

Енергетична гіпотеза розглядає розшарування постелі тільки у зв'язку з внутрішньою потенційною енергією і не враховує зовнішні сили, за рахунок яких і відбувається процес відсаджень.

Статистична гіпотеза описує відсадження як масовий процес з імовірнісним характером переміщення частинок різної крупності і густини як у вертикальному, так і в горизонтальному напрямках при їх русі до місць розвантаження з машини.

Постіль відсаджувальної машини розглядається як масова система, в якій переміщення окремих частинок носить випадковий характер, а переміщення усієї маси підкоряється закону діючих мас і носить статистичний характер. На підставі закону діючих мас кількість фракцій, що виділились у відповідний продукт за одиницю часу, пропорційна кількості тих же фракцій в вихідному матеріалі:

$$\gamma_{np}^{fp} = \gamma_{вих}^{fp} (1 - e^{-kt}), \%, \quad (5.59)$$

де $\gamma_{вих}^{fp}, \gamma_{np}^{fp}$ – вміст фракцій, що виділяються, у вихідному матеріалі і в відповідному продукті, %; t – тривалість відсадження, с; k – коефіцієнт пропорційності, що характеризує питому швидкість виділення фракцій, s^{-1} . Значення цього коефіцієнта змінюється залежно від режиму відсадження і характеристики живлення.

Статистична гіпотеза характеризує кінцеві результати відсадки і дає можливість зробити практичні висновки.

Але жодна з існуючих гіпотез не дає надійного математичного апарата для розрахунків технологічних параметрів відсаджувальних машин при їхньому конструюванні і експлуатації, а також для прогнозування результатів збагачення.

5.3.1.2 Моделювання процесу важкосередовищної сепарації

Факторна модель процесу важкосередовищної сепарації

Вхідними факторами процесу важкосередовищної сепарації є (рис. 5.16): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу (Γ_I, Φ_I), навантаження на процес по твердому (G_I), витрата суспензії (W_c) із заданими реологічними властивостями.

Вихідні фактори: вихід продуктів (γ_i) і їхня зольність (A_i).

Основними оперативними керуючими факторами процесу важкосередовищної сепарації є навантаження по вихідному матеріалу (G), витрата суспензії (W_c) із заданими властивостями, а також *проміжні фактори* - густина (δ_c) і в'язкість (μ_c) робочої суспензії, крім того, кількість суспензії, яку направляють на регенерацію.

Фактори, які збурюють процес: зольність вихідного матеріалу (A_e) гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу (Γ_1, Φ_1).

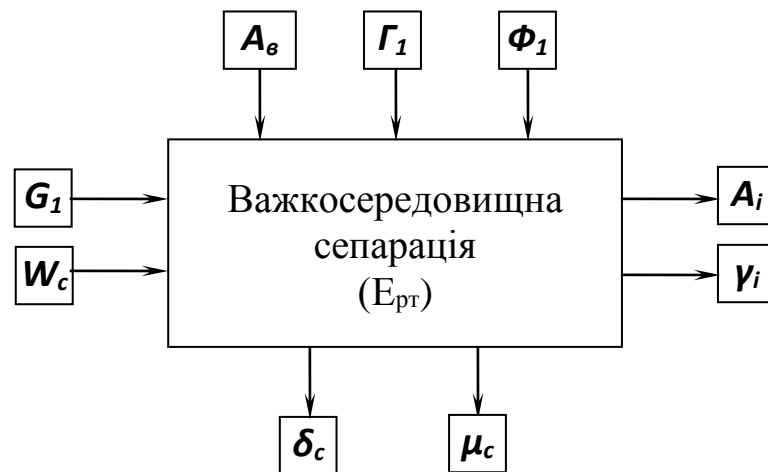


Рисунок 5.16 – Факторна схема важкосередовищної сепарації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес важкосередовищної сепарації.

Гранулометричний склад збагачуваного матеріалу характеризується верхньою і нижньою межами крупності. При збагаченні крупного машинного класу верхня межа крупності, як правило, не перевищує 200 мм, але в окремих випадках при збагаченні вугілля допускається підвищення верхньої межі крупності до 300 мм. Вміст шламів у крупному машинному класі повинен бути не більше 1,5 %. Ефективність збагачення (точність розділення) зі зменшенням крупності матеріалу знижується.

Фракційний склад збагачуваного матеріалу визначає збагачуваність матеріалу. Фракційний склад матеріалу на точність розділення не впливає, але від нього залежить якість продуктів збагачення. Якщо вміст важких фракцій в легкому продукті перевищує встановлені норми, густину суспензії знижують. При наявності легких фракцій у важкому продукті густину суспензії підвищують.

Навантаження на сепаратор за вихідним матеріалом повинно бути рівномірним. При зниженні крупності вихідного матеріалу навантаження на

сепаратор належить зменшити. Але при нормальних умовах роботи (коли сепаратор не перевантажений) навантаження за вихідним матеріалом не впливає на ефективність важкосередовищного збагачення.

Суспензії з необхідними реологічними властивостями (густина, в'язкість, стійкість) одержують з використанням обважнювачів (магнетит, феросиліцій), які містять 92 – 96 % класу – 0,074 мм.

Витрати суспензії при збагаченні крупного машинного класу у важкосередовищних сепараторах складають 0,8 – 1 м³/т.

Витрати води на відмивку обважнювача залежать від крупності збагачуваного матеріалу, вмісту шламів і густини суспензії. При відмивці обважнювача від крупних продуктів витрати води складають 0,7 – 1,1 м³/т, при відмивці обважнювача від дрібних продуктів витрати води складають 1,7 – 2,5 м³/т. Втрати обважнювача при збагаченні крупного класу складають 0,5 – 0,9 кг/т, при збагаченні дрібного класу – 1,0 – 1,7 кг/т.

Оцінка ефективності процесу важкосередовищної сепарації здійснюється за величиною середнього ймовірного відхилення від густини розділення E_{pt} .

Математичне моделювання важкосередовищної сепарації

Ймовірнісний підхід (за В.Ф. Пожидаєвим). Задача прогнозування показників збагачення зводиться до того, що при відомих фракційному складу збагачуваного матеріалу і залежності вилучення кожної фракції у кінцевий продукт, необхідно дати оцінку очікуваних результатів збагачення в сепараторі.

Ймовірність вилучення в концентрат при стаціонарному режимі (час $t \rightarrow \infty$) визначається залежністю:

$$\varepsilon_k = e^{-\frac{V\bar{h}}{2D}} \left[sh \frac{V\bar{h}}{2D} (1 - \bar{h}) \right] / sh \frac{V}{2D}, \quad (5.60)$$

де $V = \frac{d(\rho_c - \rho)}{\alpha} + W$ – швидкість руху частинки в суспензії, м/с;

$\bar{h} = h/H$ – відносна глибина завантаження матеріалу (h – глибина завантаження частинки, H – глибина ванни сепаратора);

D – коефіцієнт турбулентної дифузії, м/с²; d – розмір частинки, м;

W – вертикальна складова швидкості суспензії, м/с;

ρ_c – густина суспензії, кг/м³; ρ – густина частинки, кг/м³;

α – коефіцієнт пропорційності, який характеризує опір руху частинок в суспензії, $\text{кг} \cdot \text{с} / \text{м}^3$.

Ймовірність вилучення у відходи визначається залежністю аналогічною (5.60), але в ній необхідно параметр $(1 - \bar{h})$ замінити параметром \bar{h} і параметр V параметром $(-V)$.

З рівняння (5.60) витікає, що в умовах постійно діючих сил імовірності вилучення частинок в кінцеві продукти зворотно пропорційні відносній відстані, яку необхідно пройти частинкам до потрапляння в кінцеві продукти.

5.3.1.3 Моделювання процесу гвинтової сепарації

Факторна модель процесу гвинтової сепарації

Вхідними факторами процесу гвинтової сепарації (в його традиційному виконанні) є (рис. 5.17): характеристики вихідної сировини, зокрема, речовинний склад вихідного матеріалу (P_1), навантаження на процес по твердому і воді (G_1 , W_1), витрата змивної води ($W_{зм}$).

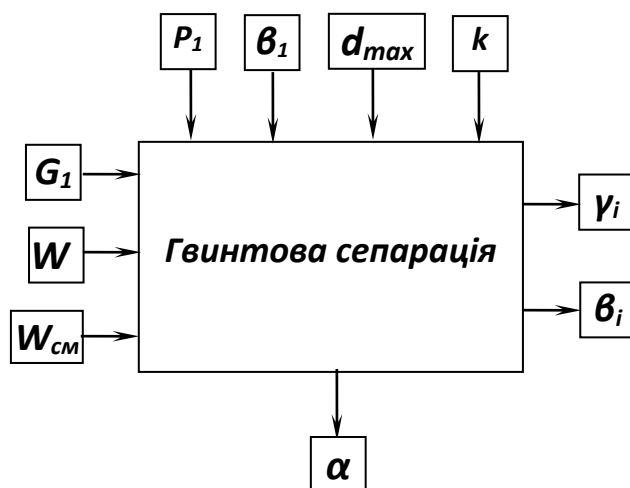


Рисунок 5.17 – Факторна модель процесу гвинтової сепарації.

Вихідні фактори: вихід продуктів (γ_i) і вміст в них корисного компоненту (β_i).

Основними оперативними керуючими факторами процесу гвинтової сепарації є навантаження по вихідному матеріалу і воді (G_1 , W_1), витрата

змивної води ($W_{зм}$). Проміжним фактором можна розглядати вміст твердого в живленні (α).

Фактори, які збурюють процес: речовинний склад вихідного матеріалу (P_I), вміст в ньому корисного компоненту (β_I), крупність (d_{max}) і форма (k) зерен.

Важливими конструктивними характеристиками гвинтової сепарації, які впливають на процес і його результати, є: діаметр, геометрія профілю поперечного перетину, число витків і крок жолоба гвинтового сепаратора та положення відсікачів для виведення продуктів збагачення.

Розглянемо вплив цих факторів на процес гвинтової сепарації.

Речовинний склад вихідного матеріалу за густиною розділюваних мінералів характеризує можливість ефективного застосування процесу гвинтової сепарації. Оцінка можливості збагачення визначається за величиною критерію Мейстера:

$$k_0 = (\delta_{вих} - \delta_{лм}) / (\delta_{лм} - 1), \quad (5.61)$$

де $\delta_{вих}, \delta_{лм}$ – густина вихідного матеріалу і легкого мінералу, т/м³.

Якщо $k_0 > 1$ збагачення гвинтовою сепарацією буде ефективним, якщо $1 > k_0 > 0,75$ збагачення ще можливе, а при $k_0 < 0,75$ розділення не відбудеться (збагачення неможливе).

Крупність мінеральних зерен характеризується верхньою і нижньою межами. Верхня межа крупності зерен при гвинтовій сепарації залежить від їх густини і її при збільшенні – зменшується. Нижня межа крупності зерен визначається умовами їх зважування і розподілення по висоті потоку в жолобі сепаратора і також зменшується при збільшенні густини зерен. На гвинтових сепараторах ефективніше вилучаються зерна крупністю понад 0,2 мм.

Багато щоб форма зерен, розділюваних мінералів була різною. Сприятливішими для збагачення випадками будуть такі, коли зерна вугільної речовини представлені округлими зернами (коефіцієнт сферичності великий), а зерна пустої породи – плоскі (коефіцієнт сферичності малий).

Вміст твердого в живленні при збагаченні складає звичайно 30 – 40 % (за масою). При густині пульпи, що перевищує вказані межі, збільшується її в'язкість і виділення породних мінералів уповільнюється, у цьому випадку важкі і легкі зерна рухаються разом біля внутрішнього

борту і не забезпечують утворення віяла продуктів розділення. Мінімальний вміст твердого в живленні складає 6 – 8 %.

Витрата змивної води повинна бути оптимальною. При оптимальних витратах змивної води підвищується ступінь концентрації матеріалу, зменшується замулювання робочої поверхні жолоба, поліпшується транспортування породних мінералів, збільшується розрідженість матеріалу біля внутрішнього борту і підсилюється поперечна циркуляція потоку. Надлишок змивної води приводить до зносу важких мінералів в зону легких продуктів, а недостача – до протилежного ефекту.

Продуктивність гвинтових апаратів залежить від діаметра витків жолоба, кута підйому гвинтової лінії, речовинного складу і крупності збагачуваного матеріалу. Зменшення крупності живлення, а також підвищений вміст у ньому глини і шламів приводить до зниження продуктивності.

Діаметр гвинтового жолоба є основним конструктивним параметром сепаратора і визначає його розміри, масу і продуктивність. Гвинтові сепаратори, що застосовуються в практиці збагачення корисних копалин, мають жолоби діаметром 600 – 2000 мм. Вибір діаметра сепаратора залежить від продуктивності по твердому, крупності і густини збагачуваного матеріалу. Матеріали, що містять крупнозерністі матеріали (1 – 2 мм), ефективніше збагачуються в сепараторах великого діаметра (1000 мм і більше), тонкозерністі матеріали (менше 0,5 мм) – в сепараторах малих діаметрів (500 – 750 мм), матеріали середньої крупності (0,074 – 1 мм) – в сепараторах будь-якого розміру.

Профіль поперечного перетину жолоба може являти собою елемент еліпса, кола, пряму лінію. Найбільш доцільним профілем для збагачення матеріалу крупністю менше 2 мм є горизонтальний еліпс, більша піввісь якого складає $\frac{1}{3}$ діаметра сепаратора, а співвідношення довжин осей – 2 : 1.

Число витків жолоба залежить від фізичних властивостей збагачуваного матеріалу. Воно збільшується зі зменшенням різниці в густині розділюваних мінералів і їх крупності. Число витків жолоба в промислових сепараторах складає 4 – 6.

Крок гвинтового жолоба визначає кут нахилу його гвинтової лінії до горизонту і впливає на гідродинамічну характеристику потоку і умови транспортування матеріалу. Зі збільшенням відносного кроку гвинтового

жолоба (відношення кроку до діаметра) показники збагачення матеріалів крупністю більше 0,2 мм погіршуються, а матеріалів крупністю менше 0,2 мм – поліпшуються. Відносний крок для промислових гвинтових сепараторів приймається рівним 0,4 – 0,6 м. Менше значення кроку приймається для сепараторів більшого діаметра, а більше значення – для сепараторів меншого діаметра.

Виведення продуктів збагачення здійснюється відсікачами, що встановлені на сепараторах в кінці останнього витка або на кожному витку жолоба. Положення ножів відсікачів визначається в кожному конкретному випадку дослідним шляхом і зберігається постійним в процесі роботи.

Математичне моделювання процесу гвинтової сепарації

За моделлю процесу мокрої гвинтової сепарації А. С. Кірнаркського [23] при імовірності переходу частинок у важкий продукт P_1 і у легкий P_2 , що залежать від відхилення їх густини δ від густини розділення в умовах повтореного з періодичністю циркуляцій сепараційного процесу, вилучення частинок у легкий продукт при кількості циркуляцій $n > 10$ складе:

$$\varepsilon_n = 1 - P_1 / 1 - \quad (5.62)$$

де $q = (1 - P_1) (1 - P_2)$, ρ – густина рідини.

$$P_1 = \frac{1}{[1 + \left(\frac{\delta_1 - \rho}{\delta - \rho}\right)^2]}; \quad P_2 = \frac{1}{[1 + \left(\frac{\delta - \rho}{\delta_2 - \rho}\right)^2]}.$$

Ці закономірності дають можливість розраховувати сепараційні характеристики гвинтових сепараторів ε (δ), при густині розділення поблизу внутрішнього (δ_1) та зовнішнього (δ_2) бортів.

5.3.1.4 Моделювання процесу концентрації на столах

Факторна модель процесу концентрації на столах

Вхідними факторами процесу концентрації на столах є (рис. 5.18): характеристики вихідної сировини, зокрема, речовинний склад вихідного матеріалу (P_1), навантаження на процес по твердому (G_1), витрата змивної води ($W_{зм}$), частота коливань (n) і хід деки (I).

Вихідні фактори: вихід продуктів (γ_i) і вміст в них корисного компоненту (β_i).

Основними оперативними керуючими факторами процесу концентрації на столах є навантаження по вихідному матеріалу (G_1), витрата змивної води ($W_{зм}$), кут нахилу деки у подовжньому і поперечному напрямках (χ, ψ). Проміжним фактором можна розглядати вміст твердого в живленні (α).

Фактори, які збурюють процес: речовинний склад вихідного матеріалу (P_1), вміст в ньому корисного компоненту (β_1) і форма (k) зерен.

Важливими конструктивними характеристиками концентрації на столах, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип концентраційного стола і тип нарифлення деки.

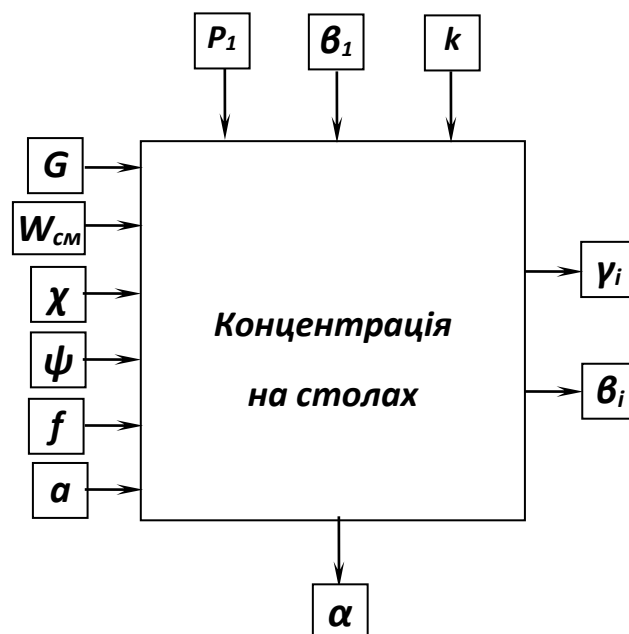


Рисунок 5.18 – Факторна модель процесу концентрації на столах.

Розглянемо вплив цих факторів на процес концентрації на столах.

Речовинний склад вихідного матеріалу характеризує можливість ефективного застосування процесу концентрації. Оцінка можливості розділення здійснюється за величиною співвідношення:

$$k = (\delta_{cp} - \Delta) / (\delta_l - \Delta), \quad (5.63)$$

де $\delta_{cp}, \delta_l, \Delta$ – середня густина збагачуваного матеріалу, густина легкого мінералу і густина рідини (звичайно води), кг/м³.

Якщо $k > 2,5$, то збагачення на столах ефективне, якщо $2,5 > k > 1,75$ ефективне збагачення можливе тільки при крупності матеріалу не більше 0,07 – 0,15 мм, а при $k < 1,75$ збагачення на столах ускладнене або взагалі неможливе.

Форма зерен має важливе значення при збагаченні на столах. Зерна важких мінералів кубічної форми розташовуються у верхній частині віяла продуктів і виділяються в концентрат, а зерна плоскі або витягнуті (тієї ж густини) розташовуються у віялі ближче до промпродукту. Видовжені або плоскі зерна краще зважуються у турбулентному потоці і тому виносяться або в промпродукт, або у відходи.

Вміст твердого в живленні коливається від 15 до 40 %. Оптимальним є вміст твердого 20–25%. При надмірній розрідженості живлення збільшується розпушеність матеріалу і значно зростає швидкість транспортування в поперечному напрямку, що приводить до виносу важких мінералів в легкий продукт. Для зниження цих втрат зменшують поперечний кут нахилу деки. При недостатній розрідженості живлення зменшується розпушеність матеріалу, що перешкоджає проходженню частинок важких мінералів в нижні шари, при цьому смуга важких мінералів у віялі продуктів виділяється нечітко.

Змивна вода необхідна для видалення частинок легких мінералів в кінці деки. При невеликих витратах змивної води і малому поперечному нахилі деки матеріал верхніх шарів, що складається з частинок малої густини, може вилучатися у важкий продукт. Надмірний поперечний нахил деки, великі витрати змивної води і нерівномірний її розподіл приводять до виносу частинок великої густини з каналів між рифлями і втрат важких мінералів. Нестача змивної води приводить до засмічення важкого продукту легкими частинками.

Частота коливань і хід деки визначають за емпіричними формулами в залежності від максимальної крупності збагачуваного матеріалу: зі збільшенням крупності збагачуваного матеріалу довжину ходу деки слід збільшувати, а частоту коливань – зменшувати.

Кут поперечного нахилу деки визначає швидкість руху водного потоку. Великі швидкості (при великих кутах поперечного нахилу) сприяють турбулізації потоку і знесенню дрібних зерен. Це приводить до втрат зерен важкого мінералу і зниження якості продуктів збагачення. Тому при збагаченні дрібнозернистих матеріалів кут поперечного нахилу складає $1,5 - 2,5^\circ$, при збагаченні грубозернистих – $4 - 8^\circ$, а для особливо крупних і важких мінералів він може бути збільшений до 10° .

Кут поперечного нахилу деки і витрати змивної води взаємопов'язані і є основними регулюючими параметрами при експлуатації концентраційних столів.

Кут подовжнього нахилу деки невеликий за величиною – від $-0,003^\circ$ до $+0,4^\circ$ (знак « $-$ » означає опускання розвантажувального кінця деки, знак « $+$ » – його підйом). Подовжній нахил деки за ходом руху матеріалу при переробці тонкозернистих і шламистих продуктів збільшує транспортуючу здатність, а нахил деки в протилежному напрямку при переробці крупнозернистих продуктів, навпаки, зменшує транспортуючу здатність.

Типи нарифлення, що застосовуються на практиці, підрозділяють в основному на піскові (для матеріалів крупністю $+0,2$ мм) і шламові (для матеріалів крупністю $-0,2$ мм).

В поперечному перетині піскові рифлі являють собою прямокутник. На деках столів для збагачення шламистих матеріалів, крім прямокутних рифлів малої висоти, є високі трикутні рифлі, перед якими утворюються спокійні зони, де відбувається осадження шламистих частинок важких мінералів.

Подовжній перетин рифлі – прямокутна трапеція з верхньою основою рівною $3/4$ нижньої. Максимальну висоту рифлі мають біля завантажувального кінця деки. Найбільшу довжину і висоту має рифля, що проходить через кут деки, який створений боком розвантаження легких продуктів і завантажувальним торцем. Кут зрізу рифлів складає $30 - 55^\circ$. У діагональних дек вздовж боку розвантаження легких продуктів установлюється додаткова «запірна» рифля висотою $20 - 25$ мм, яка перешкоджає виносу важких мінералів в легкий продукт. Вибір висоти рифлів визначається крупністю і густиною збагачуваного матеріалу, а також вмістом важких компонентів.

Концентраційні столи мають малу питому продуктивність і вимагають для своєї установки великих виробничих площ. Тому на фабриках для збагачення корінних і розсипних руд рідкісних металів

концентраційні столи використовують головним чином для перечищення концентратів.

5.3.1.5 Сепараційні характеристики як моделі процесів гравітаційного збагачення корисних копалин

Сепараційна характеристика $\varepsilon(\rho)$ гравітаційних апаратів залежить від суми сил $\sum F_i$, які діють на частинку в зоні сепарації. В залежності від головних сил в зоні сепарації о.н. тихонов [18] класифікує гравітаційні апарати на:

- апарати з природним розділювальним середовищем змінної густини з силами гравітації $\vec{F}_{\text{грав}}$, архімедовою $\vec{F}_{\text{с-А}} = -g\bar{\rho}(x,t)$, опору $\vec{F}_{\text{опир}}$ і градієнтною $\vec{F}_{\text{град}}$, напр., відсаджувальна машина з природною постіллю;

- апарати з штучним розділювальним середовищем постійної густини з силами $\vec{F}_{\text{грав}}$, $\vec{F}_{\text{с-А}} = -g\bar{\rho}_{\text{сер}}$, $\vec{F}_{\text{опир}}$ і $\vec{F}_{\text{град}}$, напр., відсаджувальна машина з штучною постіллю;

- апарати з нестисненими умовами руху частинок, в яких замість сил $\vec{F}_{\text{опир}} = 0$ і $\vec{F}_{\text{град}} = 0$ з'являється сила стокса $\vec{F}_{\text{Ст}}$, напр., розділення у важкій рідині при малій продуктивності.

Сепараційні характеристики апаратів наближаються до ідеальних при зменшенні впливу «шкідливих» сил $\vec{F}_{\text{опир}}$ і $\vec{F}_{\text{град}}$, а також по мері переходу в робочій зоні від стиснених умов до нестиснених, що пов'язане зі зменшенням продуктивності.

Гравітаційні апарати зі змінною густиною розділювального середовища [18].

Типовим представником апаратів цієї групи є відсаджувальна машина з природною постіллю. При $m = \text{const}$ отримуємо рівняння сепарації з однією невідомою функцією $\gamma(\rho, x, t)$ (рис. 5.19):

$$\partial\gamma/\partial t = D\partial^2\gamma/\partial x^2 - g\alpha^{-1}\partial[\gamma(\rho - \bar{\rho})]/\partial x;$$

$$\bar{\rho} = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho \gamma(\rho, x, t) d\rho, \quad (5.64)$$

де $D = k\alpha^{-1}$ – коефіцієнт макродифузії, $\text{м}^2/\text{с}$; тривалість сепарації $t = y/v_{mp}$ відповідає просуванню матеріалу від завантаження до розвантаження.

Ці рівняння відносяться до відсаджувальної машини з природною постіллю, яка утворюється з сепарованих частинок, середня густина $\bar{\rho}$ середовища постелі змінюється в просторі x і часі t , тобто $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x, t)$.

Для знаходження сепараційної характеристики $\varepsilon(\rho)$ необхідно попередньо вирішити рівняння (5.64) і визначити фракційний склад матеріалу $\gamma_{pez}(\rho, x) = \gamma(\rho, x, t_k)$ в зоні розвантаження концентрату і відходів при $t = t_k = y_{роз} / v_{mp}$.

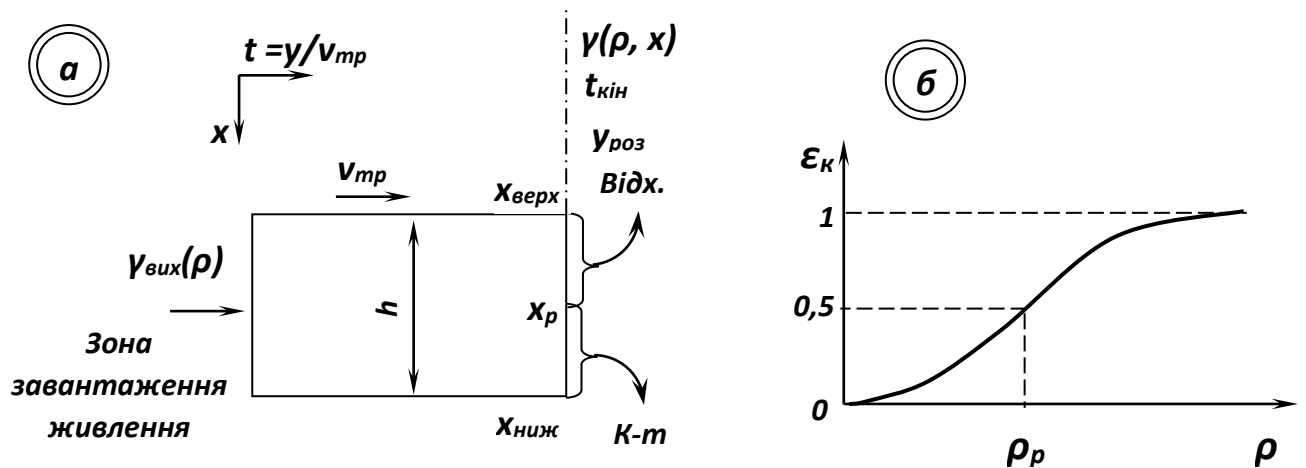


Рис. 5.19 – Робоча зона (а) і сепараційна характеристика (б) відсаджувальної машини.

Якщо до моменту розвантаження у кінці зони сепарації матеріал повністю розшарувався, функція $\gamma_{pez}(\rho, x) = \gamma(\rho, x, t)|_{t \rightarrow \infty}$.

$$\gamma_{pez}(\rho, x) = \frac{\gamma_{pez}(\rho, x_0) \exp[g\alpha^{-1}D^{-1}\rho(x-x_0)]}{\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \gamma_{pez}(\rho, x_0) \exp[g\alpha^{-1}D^{-1}\rho(x-x_0)] d\rho}. \quad (5.65)$$

В рівнянні (5.65) $\gamma_{рез}(\rho, x_0)$ – функція у загальному вигляді, тобто отримане загальне рішення може бути конкретизоване до окремого, якщо задати фракційний склад у будь-якій точці x_0 зони розвантаження $x_{верх} < x < x_{ниж}$.

Таким чином, гранично розшарований матеріал в кінці зони має фракційний склад $\gamma_{рез}(\rho, x)$, який змінюється із глибиною постелі x за законом статичного розподілення гіббса. Загальне рішення рівняння (5.65) перетворюється в конкретне окреме з урахуванням початкових умов, які залежать від фракційного складу вихідного живлення $\gamma(\rho, x, t_0) = \gamma_{вих}(\rho)$. Для знаходження $\gamma_{рез}(\rho, x_0)$ через задану функцію $\gamma_{вих}(\rho)$ необхідно скористуватися інтегральним законом збереження:

$$\gamma_{вих}(\rho) = (x_{ниж} - x_{верх})^{-1} \int_{x_{верх}}^{x_{верх}} \gamma_{рез}(\rho, x) dx. \quad (5.66)$$

Таким чином, за відомим фракційним складом живлення $\gamma_{вих}(\rho)$ прогнозується фракційний склад в різних точках $x_{верх} < x < x_{ниж}$ розвантаження у вигляді закону гіббса [18].

Сепараційна характеристика $\varepsilon_k(\rho)$ розраховується за відомими $\gamma_{вих}(\rho)$ і $\gamma_{рез}(\rho, x)$ відповідно загальним формулам (5.65) і (5.66):

$$\varepsilon_k(\rho) = Q_k \gamma_k(\rho) / Q_{вих} \gamma_{вих}(\rho) = \int_{x_p}^{x_{ниж}} \gamma_{рез} dx / \int_{x_{верх}}^{x_{ниж}} \gamma_{рез} dx, \quad (5.67)$$

де $Q_k / Q_{вих} = (x_{ниж} - x_p) / (x_{ниж} - x_{верх})$; x_p – координата положенняшибера що регулює вивантаження легкої фракції через поріг.

Середній фракційний склад концентрату визначається усередненням

$$\gamma_{вих}(\rho) = (x_{ниж} - x_p)^{-1} \int_{x_p}^{x_{ниж}} \gamma_{рез}(\rho, x) dx. \quad (5.68)$$

За формулами (5.67) і (5.68) отримано приблизну формулу сепараційної характеристики (якщо концентратом є важкий продукт):

$$\varepsilon_k(\rho) = 0,5 + 0,5\Phi[(\rho - \rho_p)\sqrt{gh(\alpha D)^{-1}\gamma\rho}], \quad (5.69)$$

де $\Phi(x) = (2/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp(-0,5t^2) dt$ – інтеграл імовірності гаусса

(нормальний закон розподілення);

$h = x_{\text{ниж}} - x_{\text{верх}}$ – товщина постелі;

$$\rho_p \approx \rho_{\max} - (Q_k / Q_{\text{вих}})(\rho_{\max} - \rho_{\min}),$$

$$\text{А точніше } Q_k / Q_{\text{вих}} = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \gamma_{\text{вих}}(\rho) d\rho.$$

Для спрощення формул глибину постелі приймають набагато більше розміру частинок матеріалу і тоді, враховуючи $0,5h \rightarrow \infty$, отримуємо:

$$\varepsilon_k(\rho) = 0,5 + 0,5\Phi[(\rho - \rho_p)\sqrt{gh[\alpha D(\rho_{\max} - \rho_{\min})]^{-1}}]. \quad (5.70)$$

Рівняння (5.70) є окремим випадком формули (5.69) при $\gamma_{\text{вих}}(\rho) = (\rho_{\max} - \rho_{\min})^{-1}$.

Слід відмітити, що формула (5.69) справедлива не тільки для відсадки, але й для інших гравітаційних процесів з дуже стисненими умовами, коли густина постелі залежить не тільки від середовища, але й від самих частинок.

Гравітаційні апарати з постійною густиною розділювального середовища [18].

Для апаратів з $\rho = \rho_p = \text{const}$, напр., суспензійних сепараторів з малим стисненням, основне рівняння сепараційного масопереносу (5.56) спрощується і для кожної вузької фракції $\rho_i = \text{const}$ відноситься до типу рівнянь фоккера-планка:

$$\partial\gamma / \partial t = D\partial^2\gamma / \partial x^2 - g\alpha^{-1}(\rho - \rho_p)\partial\gamma / \partial x, \quad (5.71)$$

де D – коефіцієнт дифузії; $-g\alpha^{-1}(\rho - \rho_p)$ – коефіцієнт зносу.

Для стаціонарного режиму рішення граничної задачі має вигляд:

$$\gamma_{рез}(\rho, x) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \gamma_{рез}(\rho, x_0) \exp[BD^{-1}(x - x_0)],$$

де $B = g(\rho - \rho_p)\alpha^{-1}$.

Інтегральний закон збереження (5.65) визначає $\gamma_{рез}(\rho, x_0)$ в точці x_0 через $\gamma_{вих}(\rho)$:

$$\gamma_{рез}(\rho, x_0) = \frac{BD^{-1}h\gamma_{вих}(\rho)}{\exp(-BD^{-1}x_0)[\exp(BD^{-1}x_{дно}) - \exp(BD^{-1}x_{верх})]},$$

де $h = x_{дно} - x_{верх}$ — товщина постелі, м.

Кінцеве рішення буде:

$$\gamma_{рез}(\rho, x_0) = \frac{BD^{-1}h\gamma_{вих}(\rho)}{\exp(BD^{-1}x_{дно}) - \exp(BD^{-1}x_{верх})}. \quad (5.72)$$

Сепараційна характеристика має вигляд:

$$\varepsilon_k(\rho) = \frac{\exp(BD^{-1}x_p) - \exp(BD^{-1}x_{верх})}{\exp(BD^{-1}x_{дно}) - \exp(BD^{-1}x_{верх})}. \quad (5.73)$$

При $x_p = 0,5(x_{дно} - x_{верх})$, тобто при розділенні концентрату і відходів в середині постелі сепараційна характеристика описується законом гіперболічного тангенсу:

$$\varepsilon_k(\rho) = 0,5 - 0,5th[gh(4\alpha D)^{-1}(\rho - \rho_p)]. \quad (5.74)$$

Для апаратів з постійною густиною середовища і нестисненими умовами руху частинок сепараційна характеристика близька до ідеальної ступінчастої.

5.3.2 Моделювання процесу флотації

Факторна модель процесу флотації

Вхідними факторами процесу флотації є (рис. 5.20): об'ємне навантаження на операцію (Q), розрідження пульпи (R), витрати реагентів:

збирача (q_z) і спінювача (q_c), а також гранулометричний склад вихідного матеріалу (Γ) та фізико-хімічні характеристики поверхні частинок, які можна узагальнити в понятті «флотованість» (Φ), інколи враховують також петрографічний склад вихідного шламу (Π).

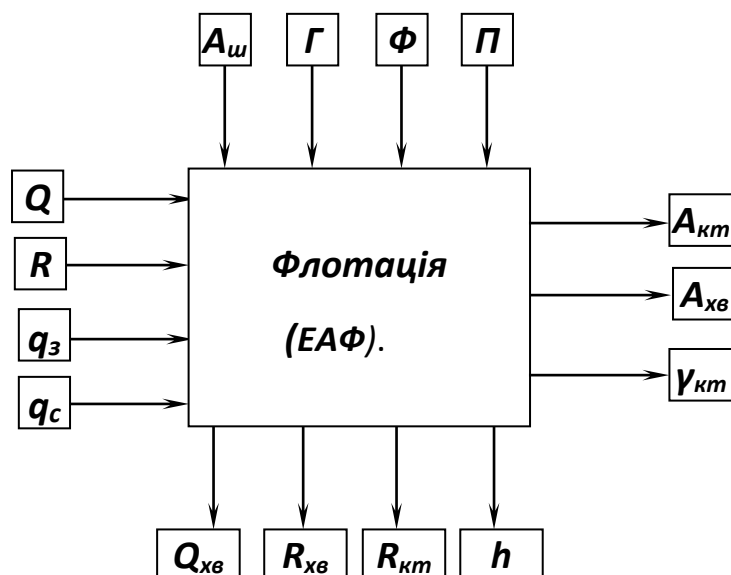


Рисунок 5.20 – Факторна модель процесу флотації.

Вихідні фактори: зольність і вихід концентрату ($A_{кт}$, $\gamma_{кт}$) та зольність хвостів флотації ($A_{хв}$); при флотації руд – відповідні показники якості (вміст корисного компонента). *Проміжними факторами* можна розглядати рівень пульпи в камері флотомашини (h), розрідженість хвостів і концентрату ($R_{хв}$, $R_{кт}$) і об'ємний вихід хвостів флотації ($Q_{хв}$).

Основними оперативними керуючими факторами процесу флотації є об'ємне навантаження на операцію (Q), розрідження пульпи (R), витрати збирача (q_z) і спінювача (q_c).

Фактори, які збурюють процес: зольність вихідного шламу ($A_{ш}$), його флотованість (Φ), речовинний і петрографічний склад шламу (Γ , Π).

Важливими технологічними характеристиками процесу флотації, які впливають на процес і його результати, є: крупність твердої фази живлення, густина і температура пульпи, йонний склад рідкої фази, реагентний режим і асортимент реагентів, спосіб аерації пульпи.

Розглянемо вплив цих факторів на процес флотації.

Об'ємне навантаження на флотаційну машину визначає тривалість флотації і, отже, вилучення органічної маси в концентрат, якісні показники

продуктів флотації. Крім того, від об'ємного навантаження залежить рівень пульпи у флотомашині. Отже, об'ємне навантаження на флотацію необхідно контролювати і регулювати (стабілізувати). При цьому стабілізується загальне навантаження на флотацію і на кожну індивідуальну флотомашину встановлюється індивідуально за допомогою затворів, розташованих на АКП (з урахуванням типу і механічного стану флотомашини).

Об'ємне навантаження в значній мірі визначає *витрату реагента-спінювача* (q_c).

Другий важливий параметр – *вміст твердої фази* в пульпі (*розрідження пульпи* R). Практика показала, що коливання вмісту твердого в пульпі в межах 80 – 150 г/л істотно не впливає на ефективність процесу. Однак цей параметр визначає необхідну *витрату реагенту-збирача* (q_z).

Витрати реагентів – гнучкі і важливі канали управління процесом. Реагент-збирач потрібно дозувати пропорційно зміні вмісту твердого в пульпі (точніше – природно гідрофобного компонента), тобто стабілізувати питому витрату збирача (г/т). Витрата реагенту-спінювача впливає на ступінь аерації пульпи, крупність і стійкість повітряних бульбашок. Чим більше об'ємне навантаження на флотацію, тим більшою повинна бути витрата спінювача.

За к.о. *разумовим флотованість* частинки можна оцінити зміною поверхневої енергії $e_1 - e_2$ до і після прилипання до бульбашки, віднесеними до одиниці утвореної поверхні газ – тверде S_{z-m} :

$$k_{рез} = (E_1 - E_2) / S_{z-m} = \sigma_{z-m} (1 - \cos \Theta), \quad (5.75)$$

де $k_{рез}$ – коефіцієнт флотованості; σ – поверхневий натяг на границях розділу відповідних фаз;

$\cos \Theta = (\sigma_{z-m} - \sigma_{p-m}) / \sigma_{z-p}$ – косинус крайового кута змочування.

Флотаційні машини розділяють частинки вихідної сировини за їхньою флотованістю k на концентрат $k > k_p$ і відходи $k < k_p$. Чим більше енергії звільнюється при закріпленні частинки на бульбашці, тим вище флотованість.

На процес флотації впливають і ряд інших факторів, наприклад, температура пульпи, pH середовища, гранулометричний і петрографічний склад шламів та ін.

Феноменологічна модель пінної флотації.

Феноменологічна схема пінної флотації відображає послідовність та взаємозв'язок всіх елементарних фізичних та хімічних процесів, які мають місце при проведенні технологічного процесу флотації (рис. 4.2): кондиціонування, аерації, елементарного акту флотації, спливання флотоагрегатів та формування пінного шару, вивантаження продуктів флотації.

Кондиціонування вихідної пульпи – обробка пульпи спеціальними реагентами-збирачами. Мета субпроцесу – зміна змочуваності мінералів при флотації. Здійснюється введенням у пульпу флотаційних реагентів і її агітацією контактних (агітаційних) чанах, апаратах кондиціонування типу “Каскад”, а також баках, флотомашинах, насосах, байпасах та ін. Флотаційні реагенти впливають на гідратні шари і змінюють їх товщину та стійкість. Тому підготовка мінеральних поверхонь до флотації зводиться до їх обробки певними реагентами, що приводить до різкого збільшення гідрофобності флотованих частинок і, отже, збільшення гідрофобно-гідрофільної контрастності вихідного шламу.

Аерація пульпи – процес насичення її повітрям (повітряними бульбашками), диспергування (подрібнення) повітря, рівномірний розподіл та перемішування в об'ємі рідини. Насичення пульпи повітрям може відбуватись у напірній, всмоктувальній лінії насоса або комбіновано, у власне флотокамері, а також хімічним способом. Таким чином, аерація пульпи при пінній флотації здійснюється безпосереднім введенням до неї повітря і виділенням газів на поверхні твердих частинок. Повітряні бульбашки при флотації мають розмір від 0,05 до 1 мм.

Елементарний акт флотації може бути розподілений на фази: зустріч мінеральних зерен і бульбашок повітря в пульпі, зіткнення, прилипання мінеральних частинок до бульбашок повітря і утворення флотоагрегатів.

Спливання флотоагрегатів та формування пінного шару – передзавершальна фаза флотаційного процесу. Мінералізована піна утворюється завдяки спливанню і накопиченню флотаційних комплексів на поверхні пульпи. Для формування дрібних повітряних бульбашок, а

також для попередження їх коалесценції (злипання) в об'ємі пульпи вводять поверхнево-активні реагенти-спінювачі, молекули яких адсорбуються на межі розділу «газ-рідина» і зменшують на ній поверхневий натяг.

Кожен із зазначених субпроцесів має свою факторну модель, на основі якої можуть бути вибрані окремі канали для математичного моделювання. Такий підхід застосовується для поглибленого вивчення процесу флотації.

Математичне моделювання процесу флотації

Імовірнісна модель флотації

Якщо процес флотації розглядати як елементарний акт, що складається із створення флотокомплекса «частинка-бульбашка», збереження його до винесення в пінний шар і переходу його в пінний продукт (концентрат), то імовірність цього акта може бути представлена у вигляді математичної моделі. За в. Ф. Пожидаєвим [21] імовірність переходу частинки в концентрат і хвости може бути розрахована:

$$P_{KT} = \frac{P_1 P_2 (1 - P_3)}{1 - P_1 [1 - P_2 (1 - P_3)]}, \quad (5.76)$$

$$P_{XB} = \frac{1 - P_2}{1 - P_1 [1 - P_2 (1 - P_3)]}, \quad (5.77)$$

де p_1 – імовірність зіткнення частинки з бульбашкою:

$$P_1 = \alpha_1 V_0 (1 - e^{-\alpha_2 h}); \quad (5.78)$$

P_2 – імовірність збереження флотокомплекса до винесення в пінний шар:

$$P_2 = \frac{(1 - e^{-\alpha_3 q_3})(1 - e^{-\alpha_4 q_c})}{(1 + \alpha_5 h)(1 + \alpha_6 x)(1 + \alpha_7 V_{nom})}; \quad (5.79)$$

P_3 – імовірність вторинної мінералізації в пінному шарі:

$$P_3 = \alpha_8 x / (1 + \alpha_9 q_3); \quad (5.80)$$

V_0 – відносна швидкість руху частинки в камері флотомашини;

V_{nom} – швидкість потоку пульпи через камеру;

H – висота камери;

X – висота знаходження частинки в камері;

Q_3 – витрата збирача; q_c – витрата спінювача;

A – характеристика параметрів процесу в залежності від рівня перебування частинки в камері (α_1 – на рівні введення пульпи в камеру, ..., α_9 – на рівні пінного шару).

Кінетична модель флотації

За рівнянням к.ф.білоглазова вилучення вузької флотаційної фракції в пінний продукт:

$$\varepsilon_i(t) = 1 - \exp(-k_i t), \quad (5.81)$$

де $k_i = \text{const}$ – флотованість вузької флотаційної фракції, с^{-1} .

З урахуванням ступеня аерації рівняння к.ф. Білоглазова має вигляд:

$$\varepsilon_i(t) = 1 - \exp(-k_i S t), \quad (5.82)$$

де S – площа поверхні бульбашок в одиниці об'єму пульпи (або питома поверхня розділу рідкої і газоподібної фаз), $\text{м}^2/\text{м}^3$.

5.3.3 Моделювання процесу магнітної сепарації

Факторна модель процесу магнітної сепарації

Вхідними факторами процесу магнітної сепарації є (рис. 5.21): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний і магнітофракційний склад вихідного матеріалу (Γ_I , Φ_I), навантаження на процес по твердому і воді (G_I , W_I), напруженість магнітного поля в робочій зоні сепаратора (H).

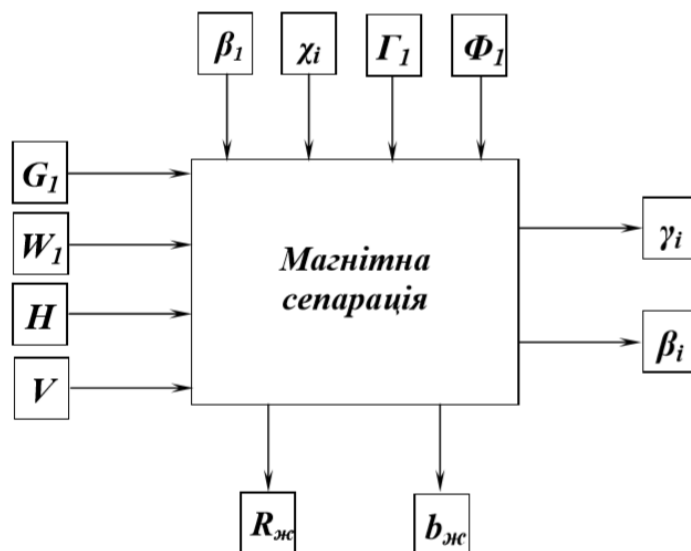


Рисунок 5.21 – Факторна модель магнітної сепарації.

Вихідні фактори: вихід продуктів (γ_i) і вміст в них корисного компоненту (β_i).

Опертивними керуючими факторами процесу магнітної сепарації можуть виступати: навантаження на процес по твердому і воді (G_I , W_I), напруженість магнітного поля в робочій зоні сепаратора (H), швидкість обертання робочого органа (V). Важливими *проміжними факторами* можна розглядати розрідженість і рівень живлення в сепараторі ($R_{жс}$, $b_{жс}$).

Фактори, які збурюють процес: вміст корисного компоненту (β_i), гранулометричний і магнітофракційний склад вихідного (Γ_I , Φ_I), магнітна сприйнятливості мінералів (χ_i)

Важливими конструктивними характеристиками магнітних сепараторів, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип сепаратора і пов'язані з ним режими сепарації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес магнітної сепарації.

Напруженість магнітного поля визначає величину магнітної сили. Магнітна сила виникає тільки в неоднорідних магнітних полях і в кожній точці поля дорівнює добутку магнітної сприйнятливості мінералу, напруженості магнітного поля в даній точці і ступеня неоднорідності поля. Надмірне збільшення напруженості магнітного поля може привести до підвищеного засмічення магнітної фракції і, навпаки, недостатня величина напруженості магнітного поля є причиною втрат магнітних мінералів з відходами. Якщо технологічна схема збагачення передбачає декілька операцій магнітної сепарації, то при перечищенні немагнітних фракцій

напруженість магнітного поля в кожній наступній операції повинна бути збільшена, а при доводці магнітних концентратів – поступово зменшена.

Швидкість обертання барабанів і валків у значній мірі визначає продуктивність сепараторів і якість продуктів розділення. Швидкість обертання робочих органів вибирається залежно від способу збагачення (сухий або мокрий), способу подачі живлення (верхній або нижній), магнітної сприйнятливості і крупності мінералів, необхідної якості продуктів збагачення (одержання готових концентратів або відвальних відходів).

При мокрому збагаченні надмірно велика лінійна швидкість обертання барабану або валка може привести до відриву пульпи від поверхні і порушити процес розділення. Внаслідок цього при збагаченні сильномагнітних руд ця швидкість не повинна перевищувати 1,5 м/с, а при збагаченні слабомагнітних руд – 0,8 – 0,9 м/с. При виділенні відвальних відходів швидкість обертання робочих органів повинна бути нижче ніж при виділенні концентратів.

Суха магнітна сепарація крупногрудкової руди допускає збільшення лінійної швидкості обертання барабану до 2 м/с. При сухому збагаченні тонкоподрібненої сильномагнітної руди технологічні показники можуть бути отримані тільки при швидкохідному режимі сепарації. Тому в сепараторів для сухого збагачення тонкоподрібнених сильномагнітних руд передбачається широкий діапазон зміни швидкості обертання барабану 1,5 – 10 м/с в залежності від магнітних властивостей і крупності збагачуваної руди. При сухій магнітній сепарації слабомагнітних руд перевага віддається швидкохідному режиму, тому що збільшення швидкості обертання валків в сепараторах як з верхнім, так і з нижнім живленням сприяє підвищенню якості магнітного продукту і продуктивності сепаратора. Швидкість обертання валків в цих сепараторах регулюється в межах 0,8 – 2,4 м/с.

Крупність збагачуваної руди є одним з найважливіших параметрів збагачуваної руди, який впливає на технологічні показники роботи сепараторів. Зі зменшенням крупності частинок їхня питома магнітна сприйнятливість знижується. При значній різниці в крупності розділюваних мінералів виникають утруднення у виборі напруженості магнітного поля, параметрів робочої зони, швидкісного режиму і продуктивності сепаратора. Тому кращі показники збагачення отримують

при використанні схем з попередньою класифікацією матеріалу по крупності.

Питома магнітна сприйнятливість впливає на селективність розділення рудних і породних мінералів. Співвідношення питомих магнітних сприйнятливостей розділюваних мінералів є основним фактором, який визначає шкалу попередньої класифікації руди перед магнітним збагаченням.

При збагаченні *слабомагнітних руд* з питомою магнітною сприйнятливістю $1 \cdot 10^{-8} \leq \chi \leq 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$ застосовують сепаратори з сильним полем ($H = 480 - 1600 \text{ кА/м}$). При збагаченні *сильномагнітних руд* з питомою магнітною сприйнятливістю $\chi > 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кг}$ застосовують сепаратори зі слабим полем ($H = 70 - 120 \text{ кА/м}$).

Густина живлення сепараторів суттєво впливає на технологічні показники мокрої магнітної сепарації. Збільшення вмісту твердої фази у живленні сприяє підвищенню продуктивності сепаратора, але в той же час – зниженню якості продуктів збагачення, і навпаки. Збільшення розрідженості пульпи, як правило, забезпечує підвищення якості магнітного продукту, але одночасно зростають втрати магнітних мінералів з відходами, оскільки збільшується швидкість проходження пульпи через робочу зону сепаратора. Оптимальна густина живлення сепараторів знаходиться у межах 30 – 40 % твердого.

Конструктивні характеристики робочої зони (довжина, діаметр і висота) визначають продуктивність сепаратора.

Сепараційна характеристика як модель процесу магнітної сепарації

Магнітні сепаратори розділяють частинки за магнітною сприйнятливістю χ , а також за густиною ρ . Для роликового або барабанного сепаратора при нестиснених умовах руху частинок в робочій зоні головними силами в рівнянні балансу сил $\sum F_i = 0$ будуть магнітна $F_M = \chi H \text{grad} H$ і відцентрова $F_{\text{вц}} = v_{\text{вц}}^2 R^{-1} \rho$ і тоді баланс сил [18]:

$$\chi H \text{grad} H - v_{\text{вц}}^2 R^{-1} \rho = 0$$

Показує граничну лінію $\varphi_p(\rho, \chi) = 0$ (рис. 5.22).

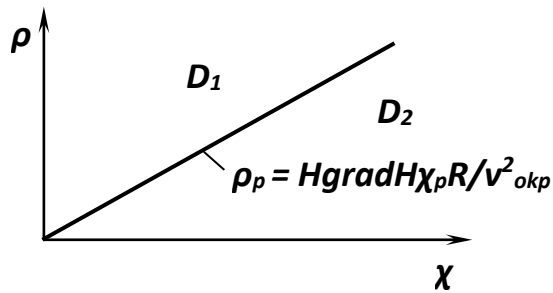


Рисунок 5.22 – Границя розділення при магнітній сепарації.

D_1 - відходи; D_2 - концентрат.

Частинки рухаються в антипаралельних силових полях. Сепараційна характеристика $\varepsilon(\rho, \chi)$ для даного балансу сил має ідеальний ступінчастий характер; при цьому стрибок від нуля до одиниці відбувається по граничній лінії.

За о.н. тихоновим [18] *характеристика магнітної сепарації*. При $\rho = const$ має вигляд нормального закону інтегралу імовірності гаусса:

$$\varepsilon_k(\chi) = 0,5\{1 + \Phi[(\chi - \chi_p) \sqrt{(\alpha D)^{-1} h a \gamma_{вих}(\chi)}]\}, \quad (5.83)$$

$$\text{де } \chi_p = \chi_{\max} - (\chi_{\max} - \chi_{\min}) Q_k / Q_{вих}; \quad Q_k / Q_{вих} = \int_{\chi_p}^{\chi_{\max}} \gamma_{вих}(\chi) d\chi.$$

Де χ_p – магнітна сприйнятливість розділення; χ_{\max}, χ_{\min} – максимальна і мінімальна сприйнятливість збагачуваного матеріалу; $Q_k, Q_{вих}$ – кількість концентрату і вихідного матеріалу.

Наведена сепараційна характеристика відноситься до найбільш складного випадку, коли середня магнітна сприйнятливість мінеральної суміші змінюється по простору $\bar{\chi} = \bar{\chi}(x, t)$ внаслідок значного перепаду концентрацій магнітних матеріалів в напрямку x .

В сепараторах з $\bar{\rho} = const$ і $\bar{\chi} = const$, тобто з постійною магнітною сприйнятливістю постелі рівняння спрощується до рівняння типу фоккера-планка:

$$\partial \gamma / \partial t = D \partial^2 \gamma / \partial x^2 - A \partial \gamma / \partial x,$$

де $A = \alpha^{-1}[g(\rho - \bar{\rho}_{сер}) - a(\chi - \chi_{сер})]$.

Сепараційна характеристика розрахована за загальною методикою буде [18]:

$$\varepsilon_k(\rho, \chi) = \frac{\exp(AD^{-1}x_p) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}{\exp(AD^{-1}x_{дно}) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}, \quad (5.84)$$

де $x_p = x_{верх} + (x_{ниж} - x_{верх})Q_k / Q_{вих}$ – координата розділення концентрату і відходів в розвантажувальній зоні.

Сепараційна характеристика по ρ і χ при роз'єднанні концентрату і відходів в середині робочої зони $x_p = x_{дно} + 0,5h$ буде більш простою:

$$\varepsilon_k = 0,5 + 0,5th[(4\alpha D)^{-1}ha(\chi - \bar{\chi}_{сер}) - (4\alpha D)^{-1}hg(\rho - \bar{\rho}_{сер})], \quad (5.85)$$

де $h = x_{дно} - x_{верх}$ – глибина постелі.

Розділова лінія (рис. 5.22), для якої половина частинок потрапляє в концентрат, а інша половина – у відходи ($\varepsilon_k = 0,5$), може бути виражена рівнянням:

$$a(\bar{\chi} - \chi_{сер}) - g(\bar{\rho} - \rho_{сер}) = 0.$$

В окремому випадку, якщо знехтувати змінною густиною мінералів, тобто допустити, що $\rho = \rho_0 = const$ і сепарація здійснюється тільки по χ , то з рівняння (5.85) отримуємо:

$$\varepsilon_k(\chi) = 0,5 + 0,5th[(4\alpha D)^{-1}hHgradH(\chi - \chi_p)], \quad (5.86)$$

де $\chi_p = \chi_{сер} + g(\rho - \rho_{сер}) / HgradH$ – магнітна сприйнятливості розділення; $\varepsilon_k(\chi_p) = 0,5$.

Кінетична модель високоградієнтної магнітної сепарації Ю.С. Мостики базується на викладеному вище феноменологічному підході до моделювання. В основу моделі покладені наступні принципи [28]:

- робоча зона сепаратора розглядається як сукупність послідовно розташованих сепараційних шарів, перпендикулярних напрямку руху пульпи;

- процес уловлювання і сепарації розглядається як незалежний в кожному шарі, при цьому початковим живленням шару є немагнітний (слабкомагнітний) продукт попереднього шару.

Кількість матеріалу Q , що надійшов у робочу зону за кінцевий інтервал часу Δt , визначається за формулою:

$$Q = S V_f \Delta t (1 - k) \rho_n (\rho_n - 1000) / (\rho_{сеп} - 1000), \quad (5.87)$$

де S – площа робочої зони; V_f – середнє значення швидкості фільтрації пульпи; k – коефіцієнт заповнення простору робочої зони матриці матеріалом; ρ_n – густина пульпи; $\rho_{сеп}$ – середня густина вихідного матеріалу, що подається на збагачення.

Інтегруючи суму $Q_{магн}(f, i)$ для всіх фракцій f і шарів i матриці можна одержати кінетичні криві виходу магнітного продукту $\gamma(t)$; вмісту оксиду заліза в немагнітному продукті $\beta(t)$ та вилучення заліза в магнітний продукт $\varepsilon(t)$. Кінетична модель Ю.С. Мостики враховує магнітний фракційний склад, крупність частинок та пріоритет їх уловлювання феромагнітними елементами матриці сепаратора.

Враховуючи те, що способів магнітного розділення мінералів нараховується близько 10, В.В.Кармазін [32] подає узагальнююче основне рівняння динаміки магнітного розділення мінералів:

- для процесів «відхилення, осадження»:

$$\begin{cases} m d^2 x / dt^2 = F_M(x) - \sum F_{Mex}(x) - \sum F_{дис} \\ m d^2 y / dt^2 = F_M(y) - \sum F_{Mex}(y) - \sum F_{дис} \end{cases}$$

- для процесів «утримання», що застосовуються при зниженій сприйнятливості магнітного матеріалу:

$$\begin{cases} F_M(x) - \sum F_{Mex}(x) - \sum F_{disc} = 0 \\ F_M(y) - \sum F_{Mex}(y) - \sum F_{disc} = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_M \geq F_{Mex} - \sum F_{disc}$$

де $F_M(x)$ — магнітна сила в залежності від координати x (відстань від полюса); $\sum F_{Mex}(x)$, $\sum F_{disc}$ - рівнодіючі відповідно механічних та дисипативних сил в залежності від x .

5.4 Моделювання заключних процесів збагачення корисних копалин

5.4.1 Моделювання процесу згущення у радіальному згущувачі

Структурно-функціональна схема процесу згущення

Л. В. Шпильовим розроблена структурно-функціональна схема процесу згущення у радіальному згущувачі, яка об'єднує факторну і феноменологічну моделі процесу. Згідно з цим підходом у радіальному згущувачі з периферійним приводом та безперервним розвантаженням згущеного продукту виділено наступні субпроцеси (рис. 5.23): а) розтікання суспензії від живильної лійки до периферії згущувача; б) витиснення рідкої фази у злив; в) осадження дисперсної фази; г) стиснення осаду; д) ущільнення осаду; е) транспортування ущільненого осаду до розвантажувальної лійки; ж) змішування його з суспензією зони стиснення.

Математичне моделювання процесу згущення у радіальному згущувачі

Л.В.Шпильовий зі співавторами розробив ряд математичних моделей процесу і субпроцесів згущення у радіальному згущувачі [24].

Дослідження субпроцесу осадження дисперсної фази та консолідації осаду на дні згущувача здійснювалося із плануванням експерименту за програмою центрального композиційного ротатбельного плану другого порядку Бокса-Хантера. Об'єкт дослідження – суспензії, приготовлені із сухих порошків нефелін-польовошпатових хвостів збагачення рідкіснометалічної руди Мазурівського родовища, польовошпатового, цирконового та піритного концентратів. У якості флокулянту застосовували 0,1% водний розчин поліакриламід (ПАА). За цільову

функцію приймали швидкість осадження дисперсної фази, яка визначалася згідно із загальноприйнятими рекомендаціями.

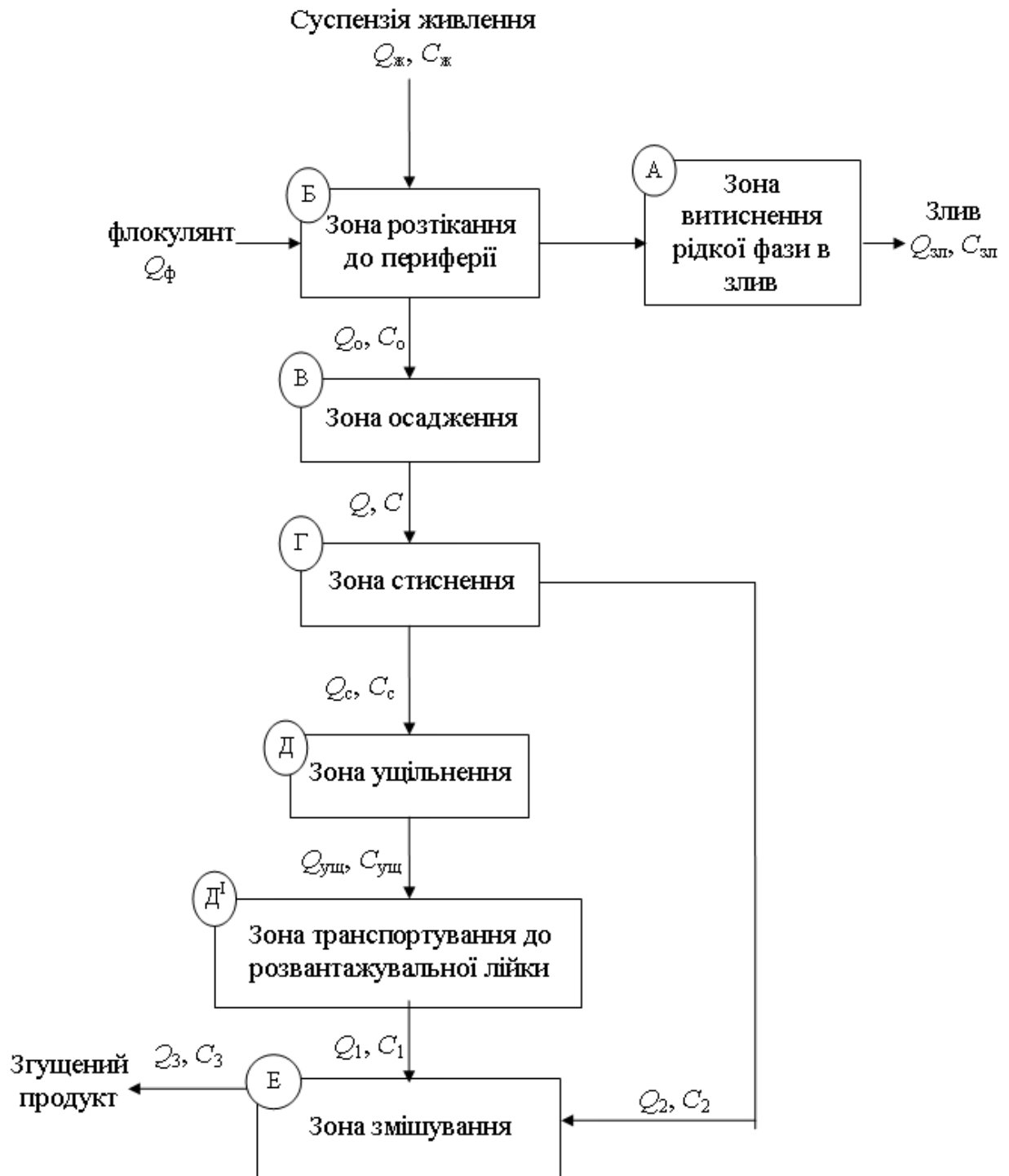


Рисунок 5.23 – Структурна схема процесу згущення

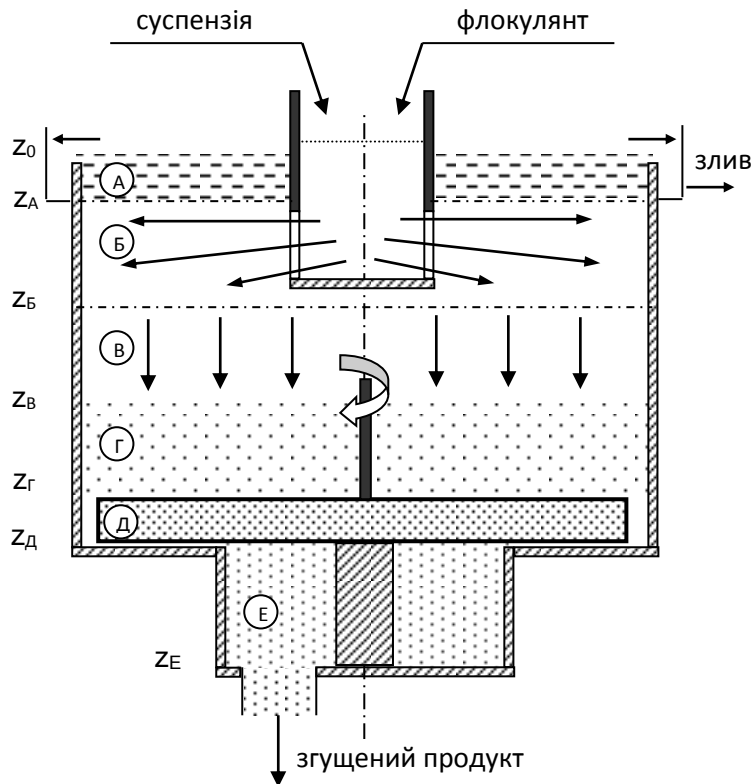


Рисунок 5.24 – Схема розподілу зон в радіальному згущувачі

Математична модель, яка адекватно описує процес осадження дисперсної фази польвошпатових хвостів основної флотації цирконій-тантал-ніобієвої руди, отримана обробкою за допомогою модуля Statgraphics 3.0 Plus представлена поліномом:

$$Y = 7,286 + 0,579 X_1 - 0,129 X_2 - 0,588 X_3 - 0,775 X_4 + 0,554 X_5 - 0,571 X_1^2 + 0,681 X_1 X_2 - 0,590 X_2^2, \quad (5.88)$$

де Y – швидкість осадження дисперсної фази, мм/с; X_1 – питомі витрати флокулянту (ПАА); X_2 – концентрація йонів водню (величина рН); X_3 – вміст класу $-0,063$ мм в дисперсній фазі; X_4 – концентрація дисперсної фази в суспензії; X_5 – температура суспензії.

Поверхня відгуку $Y = f(X_1, X_2)$ – це еліптичний параболоїд з екстремумом-максимумом в області $X_1 = 0,35$; $X_2 = -0,1$. Екстремальна залежність швидкості осадження від витрат флокулянту пояснюється тим, що при недостатніх витратах ПАА на поверхні частинок твердої фази утворюється плівка флокулянту замалої товщини, а при передозуванні флокулянту настає стабілізація суспензії. Аналіз моделі осадження показує, що координати екстремуму змінюються (дрейфують) при

відхиленні величини рН середовища від оптимального як по осі ординат, так і по осі абсцис.

Дослідження процесів консолідації – стиснення і ущільнення – дисперсної фази суспензії рідкіснометалічних руд Мазурівського родовища дозволило отримати адекватні регресійні моделі:

$$Y_c = 1,61 - 0,037X_1 + 0,03 X_2 + 0,11 X_3 + 0,25 X_4 - 0,084 X_5 + 0,047X_1^2 - 0,04 X_1 X_2 + 0,052 X_2^2 - 0,044 X_3 X_4 - 0,066 X_4^2 + 0,032 X_4 X_5; \quad (5.89)$$

$$\rho = 0,786 + 0,013 d, \quad (5.90)$$

де Y_c – густина суспензії зони стиснення, кг/дм³; ρ – густина ущільненого осаду, кг/дм³; d – вміст класу –0,063 мм в дисперсній фазі, %.

Аналіз отриманих моделей показав, що при зміні параметрів суспензії живлення у встановлених регламентом межах густина стисненого осаду Y_c може змінюватися на ± 45 % від середнього значення і є суттєвим збуренням. Густина ущільненого осаду ρ визначається для досліджуваного типу мінеральної сировини гранулометричним складом дисперсної фази й змінюється лише на $\pm 6 \dots 7$ % від середньої внаслідок руйнування флокул дисперсної фази під час транспортування осаду до розвантажувальної лійки.

Процес змішування ущільненого осаду із суспензією зони стиснення в розвантажувальній лійці згущувача Л.В.Шпильовим змодельовано із застосуванням математичного апарату теорії автоматичного регулювання як змішувач з неповним перемішуванням. Така система складається з послідовно з'єднаних елементів повного перемішування і транспортного запізнювання. Динамічну модель субпроцесу змішування представлено у спрощеному вигляді передавальною функцією із застосуванням перетворення Лапласа:

$$W(p) = \frac{k_1}{1 + pT_1} \cdot e^{-p\tau}. \quad (5.91)$$

Передавальна функція системи транспортування осаду для цього випадку знайдена методом суперпозиції на основі аналітично виведених передавальних функцій каналами регулюючого впливу «частота обертання ферми – витрати осаду, що надходить до розвантажувальної лійки» та збурюючого впливу «витрати ущільненого осаду – витрати осаду, що надходить до розвантажувальної лійки», і представлена у вигляді:

$$W(p) = e^{-p\tau_0} + \bar{\mu}_{\text{ex}} (1 - e^{-p\tau_0}), \quad (5.92)$$

де $\bar{\mu}_{\text{ex}}$ – наповнення гребків (маса осаду на одиниці довжини шляху гребків; $\bar{\mu}_{\text{ex}} = \bar{G}_{\text{oc}}/\bar{w}$, де \bar{G}_{oc} – середні витрати дисперсної фази суспензії, що надходить у зону ущільнення, та \bar{w} – середня швидкість транспортування осаду гребками ферми).

Дослідження цієї моделі показує, що густина згущеного продукту, який вивантажується з радіального згущувача, визначається результатами змішування ущільненого осаду із суспензією зони стиснення в розвантажувальній лійці згущувача.

Імовірнісна модель

За в.ф. пожидаєвим вивчення процесу осадження зводиться до дослідження імовірнісних схем, або рівнянь випадкового блукання частинок в середовищі. Початкова інформація про полідисперсну суміш частинок, які надходять в апарат повинна задаватися у вигляді функції розподілення частинок по розмірах $\phi(s)$, що являє собою відношення числа переходів частинок вузького класу $(s, s+ds)$ до загального числа спостерігаємих подій. Функція $\phi(s)$ знаходиться по функції розподілення частинок за розмірами в масових частках $f(s)$:

$$\Phi(S) = \left(\int_0^D \frac{dF(S)}{S} \right)^{-1} \int_0^S \frac{dF(S)}{S}, \quad (5.93)$$

$$F(S) = \left(\int_0^D S d\Phi(S) \right)^{-1} \int_0^S S d\Phi(S), \quad (5.94)$$

Де s – розмір частинки; d – максимальний розмір частинок в суміші.

Приймаючи закон опору руху частинки (напр., закон стокса) і використовуючи зв'язок між функціями розподілення частинок по розмірах, можна перейти до розподілу за швидкостями осадження $\psi(w)$. В даному випадку процес осадження описується дифузійним оператором:

$$L = \frac{\partial C_w}{\partial t} - D_z \frac{\partial C_w}{\partial z^2} - W \frac{\partial C_w}{\partial z} + U \frac{\partial C_w}{\partial x}, \quad (5.95)$$

Де d_z – коефіцієнт дифузії; w, u – швидкості знесення по осях z і вісі x , відповідно.

Для полідисперсної суміші частинок, яка задана власною функцією розподілення $\psi(w)$, концентрація неоднорідної за складом домішки може бути знайдена як математичне очікування випадкової величини c_w :

$$C^*(x, z, t) = \int_0^{W_D} C_w d\Psi(W). \quad (5.96)$$

Імовірність переходу частинок в суміжні за висотою шару припускається постійною, що витікає з розгляду дискретної схеми випадкового блукання:

$$L = C_j^i(t + \Delta t) - \sum_{l=i-1}^{l=i+1} C_j^l(t) \cdot P_j^{l,i}, \quad (5.97)$$

Де i – номер шару; j – номер вузького класу частинок із швидкістю очікування w_j ; $P_j^{l,i}$ – імовірність переходу в суміжні шари, при цьому $\sum_{l=i-1}^{l=i+1} P_j^{l,i} = 1$. При $t = 0$ C_j – концентрації задані функцією розподілення $\psi(w)$ або, що теж саме, $\phi(s)$.

Таким чином, дія оператора L приводить до безперервної «деформації» функції розподілення вихідної суміші в просторі і часі так, що в будь який заданий момент часу t стає відомою найбільш повна інформація про процес у вигляді дійсної функції розподілу частинок за розмірами в кожній точці простору (x, z) або в кожному шарі i (для дискретної моделі).

5.4.2 Моделювання процесу зневоднення фільтруванням

Факторна модель процесу фільтрування

Вхідними факторами процесу фільтрування є (рис. 5.25): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад вихідного матеріалу (Γ_1), об'ємне навантаження на операцію (Q_1), вакуум і тиск повітря (w, p).

Вихідні фактори: вихід і вологість кеку (γ_k, W_k^r), вміст твердої фази у фільтраті (β_ϕ). *Проміжним фактором* можна розглядати рівень пульпи у ванні вакуум-фільтра (H).

Основними оперативними керуючими факторами процесу фільтрування є об'ємне навантаження на операцію (Q_1), вакуум і тиск повітря (w, p), швидкість руху фільтруючої поверхні (час її перебування під вакуумом, t_ϕ).

Фактори, які збурюють процес: гранулометричний склад (Γ_1) вихідної сировини, розрідження пульпи (R). Крім того, можлива зміна фізико-хімічних характеристик твердої фази, що може суттєво вплинути на процес.

Важливими конструктивними характеристиками вакуум-фільтрів, які впливають на процес і його результати, є: конструкція вакуум-фільтра, площа фільтруючої поверхні.

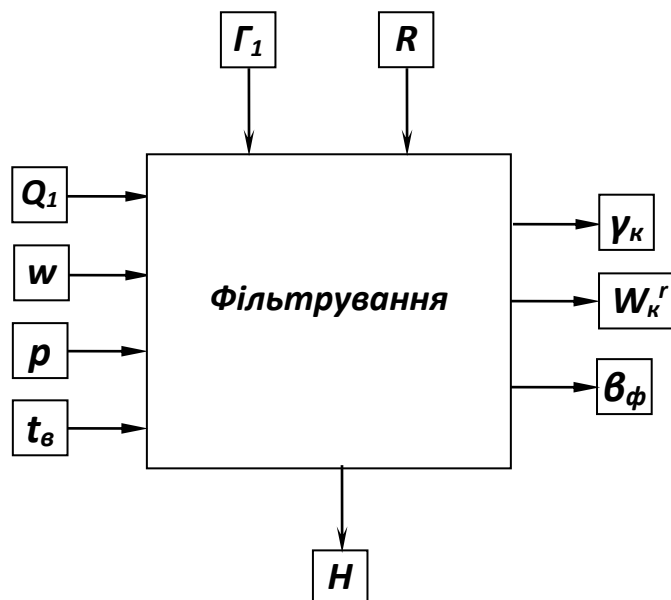


Рисунок 5.25 – Факторна модель процесу фільтрування.

Розглянемо вплив цих факторів на процес фільтрування.

Зі збільшенням *густини пульпи* продуктивність вакуум-фільтрів збільшується. Однак при фільтруванні мулистих шламів підвищення густини пульпи до підвищення продуктивності не приводить.

Найбільш сприятливий за *гранулометричним складом* флотаційний концентрат коксівного вугілля містить від 20 до 40 % класу $-0,06$ мм. При вмісту класу $-0,06$ мм менше вказаної норми збільшується розшарування пульпи за крупністю у ванні фільтра і погіршується процес фільтрування. При збільшенні вмісту класу $-0,06$ мм у пульпі (особливо якщо він перевищує 50 %) продуктивність фільтру зменшується, а вологість осаду збільшується. На ефективність роботи вакуум-фільтрів суттєво впливає розшарування матеріалу у ванні за крупністю.

Одночасно зі зміною гранулометричного складу по висоті шару пульпи у ванні вакуум-фільтру змінюється вміст твердого. Якщо у переливі він складає 250 кг/м^3 , то на дні ванни – 500 кг/м^3 , тобто у 2 рази вище, ніж у верхніх шарах пульпи.

На продуктивність вакуум-фільтрів суттєво впливає *зольність тонких класів* ($-0,06$ мм) у флотоконцентраті, що надходить на фільтрування. Присутність глинистих частинок приводить до створення щільних осадів з малою проникністю, зниження швидкості фільтрування і забивання фільтруючої поверхні. *Додання (до 40 %) зернистого шламу* крупністю $0,3 - 0,4$ мм при фільтруванні тонких флотаційних концентратів є одним з методів покращення процесу фільтрування, так як збільшує пористість шару сипкого матеріалу.

Продуктивність вакуум-фільтрів збільшується в 1,5 рази при *флокуляції флотаційного концентрату* перед фільтруванням. Крім того, при цьому полегшується віддувка осаду і знижується вміст твердого у фільтраті до $10 - 20 \text{ кг/м}^3$ (без флокуляції $30 - 40 \text{ кг/м}^3$). Однак при флокуляції пульпи вологість осаду збільшується.

Вакуум впливає на продуктивність фільтру і вологість осаду: зі збільшенням вакууму питома продуктивність збільшується, а вологість осаду зменшується. Рациональні межі вакууму – не менше 60 – 67 кпа.

Тиск стисненого повітря при віддувці не повинен перевищувати 50 кпа для запобігання пориву фільтрувальної тканини. Найбільший ефект при розвантаженні шару осаду (коржа) дає віддувка тривалістю 2–4 с.

Частота обертання дисків впливає на продуктивність вакуум-фільтру і вологість осаду: зі збільшенням частоти обертання

продуктивність і вологість осаду збільшуються. Оптимальна частота обертання дисків встановлюється експериментально у залежності від гранулометричного складу твердої фази. До аналогічних результатів приводить збільшення *швидкості руху стрічки* стрічкових вакуум-фільтрів.

Зниження *рівня пульпи* у ванні приводить до зменшення товщини осаду, погіршення віддувки і, отже, до зменшення продуктивності вакуум-фільтра. Рівень пульпи необхідно підтримувати постійним автоматично або циркуляцією 5 – 10 % пульпи через перелив з ванни.

Стрічкові фільтри менш чутливі до зміни гранулометричного складу вихідної пульпи, але вимагають попереднього згущення до 600 кг/м^3 і більше.

Феноменологічна модель процесу фільтрування

Феноменологічна модель процесу фільтрування наведена на рис. 5.26.

Субпроцес 1 «Набирання осаду і фільтрування води». Під дією вакууму в ванні фільтру на фільтрувальну поверхню з пульпи осаджується тверда фаза і з неї відсмоктується вода (фільтрат).

Субпроцес 2 «Просушування осаду». Фільтрувальна поверхня виходить із пульпи і з осаду (кеку) під дією вакууму відсмоктується остаточна волога.

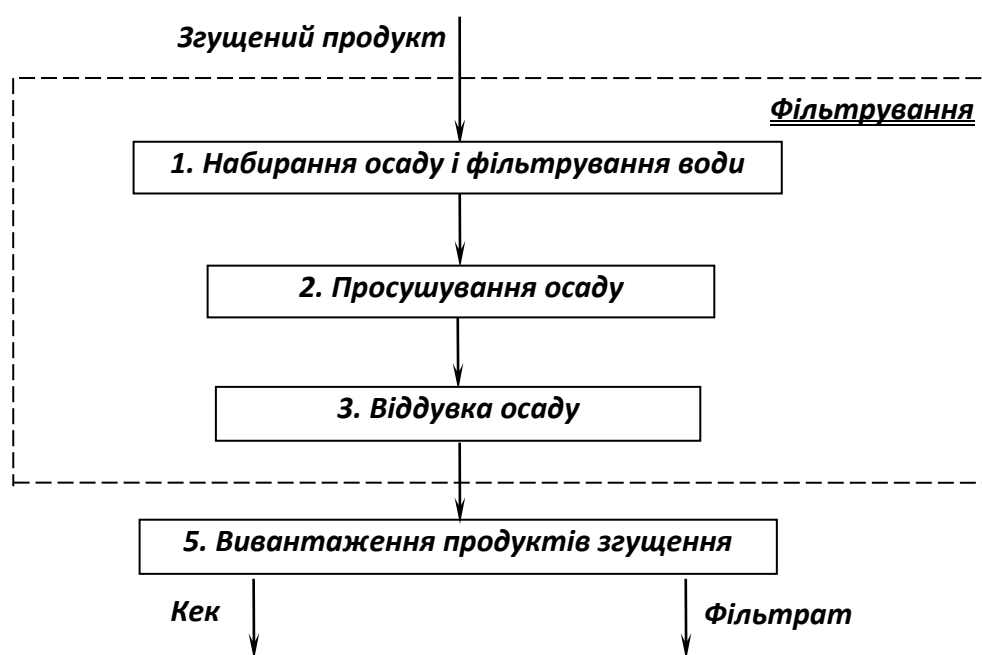


Рисунок 5.26 – Феноменологічна модель процесу фільтрування.

Субпроцес 3 «Віддудка осаду». Для відділення кеку від фільтрувальної поверхні під неї подається стиснене повітря.

Субпроцес 4 «Вивантаження продуктів фільтрування». Вивантаження кеку здійснюється його віддудкою стисненим повітрям і зняттям шкребками. Фільтрат проходить крізь шар осаду, отвори фільтрувальної тканини і через канали полого вала фільтру і потрапляє в розподільну головку, далі у ресивер.

Математичне моделювання процесів зневоднення

При зневодненні продукту, який містить W_0 води, є частина води W_0^* , яка не видаляється при процесі механічного зневоднення, та, що видаляється W_0' . Очевидно, що $W_0 = W_0' + W_0^*$. Видалення води при $W_0' = \text{const}$ за час t описується рівнянням:

$$W_{\text{зал}} = W_t = (W_0 - W_0^*)e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + W_0^*, \quad (5.98)$$

де $W_{\text{зал}} = W_t$ – маса води, яка залишилася в продукті після протікання процесу протягом часу t ; $K[W_0]$, $n[W_0]$ – константи кінетики, які характеризують умови зневоднення при початковій масі води W_0 ; $W_0^* = W[t = \infty]$ – маса залишку води, який не вилучається.

Після подвійного логарифмування рівняння (5.98) з урахуванням маси твердої фази, що залишилася не видаленою до моменту t , отримуємо рівняння кінетики, яке виражене через параметри концентрації твердої фази:

$$R_t = R[t]_{\text{зал}} = \frac{1}{\gamma_t} (R_0 - \gamma^* R_0^*) e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + \frac{\gamma_0^*}{\gamma_t} R_0^*, \quad (5.99)$$

де $\gamma[t] = \gamma_t$ – вихід зневодненого продукту по сухій масі твердої фази; $\gamma_0^* = \gamma[t = \infty]$ – вихід залишку твердої фази, який не вилучається з водної фази; $R_0 = \frac{W_0}{T_0} = \frac{1 - T_0}{T_0}$ – відношення рідкого до твердого у вихідному

продукті; $R_0^* = \frac{W_0^*}{T_0^*} = \frac{1-T_0^*}{T_0^*}$ – те ж саме, по залишку, що не видаляється;

$R_1 = R_{зал} = \frac{W_t}{T_t} = \frac{1-T_t}{T_t}$ – те ж саме в зневодненому продукті.

В деяких випадках кількість твердої фази, яка видаляється з водою (напр., фільтратом), невелика і нею можна знехтувати в порівнянні і кількістю твердої фази в згущеному продукті. Тому допустимо прийняти $\gamma_t = \gamma_0^* = 1$ і для *процесу фільтрації* рівняння (5.99) спрощується і має вигляд:

$$R_{зал} = (R_0 - R_0^*)e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + R_0^* \quad (5.100)$$

або, якщо виконати заміну $R = \frac{1-T}{T}$, отримуємо:

$$T_t = \frac{T_0 T^*}{(T^* - T_0)e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + T_0}, \quad (5.101)$$

де T_0 – вміст твердої фази у вихідному продукті (живленні); $T_t = T_{зал}$ – те ж саме в кеку (зневодненому) продукті; T_0^* – граничний вміст твердого (залишок, що не вилучається).

Формули (5.99) і (5.100) справедливі тільки в окремих випадках, коли $n \approx 1$ або $(R_0 - R_0^*) = const$; в інших випадках параметри K і n змінюються відповідно R_0 .

При аналізі *процесу згущення* можна знехтувати кількістю твердого, яка видаляється в злив, тобто $\gamma_0 = \gamma_{згуц} = \gamma_{згуц}^*$.

При відсутності втрат твердої фази залежність висоти шару осаду від часу осадження буде:

$$H_t = (H_0 - H_0^*)e^{-Kt^n} + H_0^*. \quad (5.102)$$

Висота шару проясненого шару рідини (злив) знаходиться по різниці:

$$H_{\text{прояс}} = H_0 - H_t = (H_0 - H_0^*)(1 - e^{-Kt^n}) \quad (5.103)$$

Спільне рішення рівнянь (5.100) і (5.102) дозволяє визначити концентрацію твердої фази в осаді по висоті апарата:

$$R_t = \frac{(R_0 H_0^* + H_0 R_0^*) - H_t (R_0 - R_0^*)}{H_0 - H_0^*} \quad (5.104)$$

або

$$R_t = A - B H_t, \quad (5.105)$$

$$\text{де } A = \frac{R_0 H_0^* + H_0 R_0^*}{H_0 - H_0^*} = \text{const}; \quad B = \frac{R_0 - R_0^*}{H_0 - H_0^*} = \text{const}.$$

Таким чином, відношення концентрацій фаз P / T в осаді лінійно пропорційне висоті шару H_t , з урахуванням співвідношення $R = (1 - T) / T$ маємо:

$$T_t = \frac{1}{A - B H_t + 1}, \quad (5.106)$$

тобто вміст твердої фази знаходиться в зворотній залежності від висоти шару.

В розділювальних апаратах (збагачувальних машинах, класифікаторах та ін.) розподілення води є процесом супутнім основному процесу. В даному випадку живлення (за масою твердої фази) розділяється на два продукти $\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2$; продукт, в якому підвищується концентрація твердого називаємо зневодненням, інший продукт – зливом.

Для розділювальних апаратів час зневоднення (час розділення) визначається тривалістю знаходження матеріалу в апараті.

Об'ємну продуктивність по пульпі можна виразити через концентрацію води R_0 , продуктивність по масі сухої твердої фази Q_0 і її густину δ :

$$Q_n = Q_0 (1 + R_0 \delta) \frac{1}{\delta}.$$

Рівняння кінетики зневоднення після заміни t через Q_n : $t = \frac{V}{Q_n}$;

$V = const$ – робочий об'єм апарата; $K_Q = K_t V^n = const$.

Співвідношення фаз буде:

– в зневодненому продукті:

$$R_{32} = \frac{1}{\gamma_{32}} \left[(R_0 \gamma_0 - \gamma_{32}^* R_{32}^*) e^{-\frac{K}{Q_{32}^n}} + \gamma_{32} R_{32} \right]; \quad (5.107)$$

– в зливі

$$R_{3l} = \frac{1}{\gamma_{3l}} \left[(R_0 \gamma_0 - \gamma_{32}^* R_{32}^*) \left(1 - e^{-\frac{K}{Q_{32}^n}} \right) \right]. \quad (5.108)$$

Рівняння (5.107) і (5.108) справедливі тільки при $n \approx 1$ або $W_0 = \gamma_0 R_0 - \gamma_{32}^* R_{32}^* \approx const$, тому що в них недостатньо повно враховується співвідношення фаз у вихідному продукті.

Практичне використання рівнянь кінетики можливе при відомих коефіцієнтах K і n , які акумулюють в себе технологічні умови видалення води. Коефіцієнти кінетики визначаються за даними досліджень і при зміні технологічних умов процесу коефіцієнти також змінюються.

5.5 Моделювання технологічних схем збагачення корисних копалин

5.5.1 Постановка проблеми і загальні рішення

Для більшості збагачувальних апаратів сепараційна характеристика $\mathcal{E}(\xi)$ далека від ідеальної ступінчастої (напр., флотомашина з експоненціальною сепараційною характеристикою), тому апарати з'єднують в технологічні схеми таким чином, щоб результуюча сепараційна характеристика $\mathcal{E}_{рез}(\xi)$ схеми у цілому була ближче до ідеальної [16, 20].

Практикою опрацьований типовий випадок рішення даного питання – *канонічні схеми* (рис. 5.27), в яких є основна, n перелісних і m контрольних операцій [18]. Промпродукти будь-якої перелісної і контрольної операції повертаються в живлення попередньої. Особливо розгалужені перелісні і контрольні гілки в схемах флотації внаслідок неідеальної сепараційної характеристики окремої операції (флотомашини).

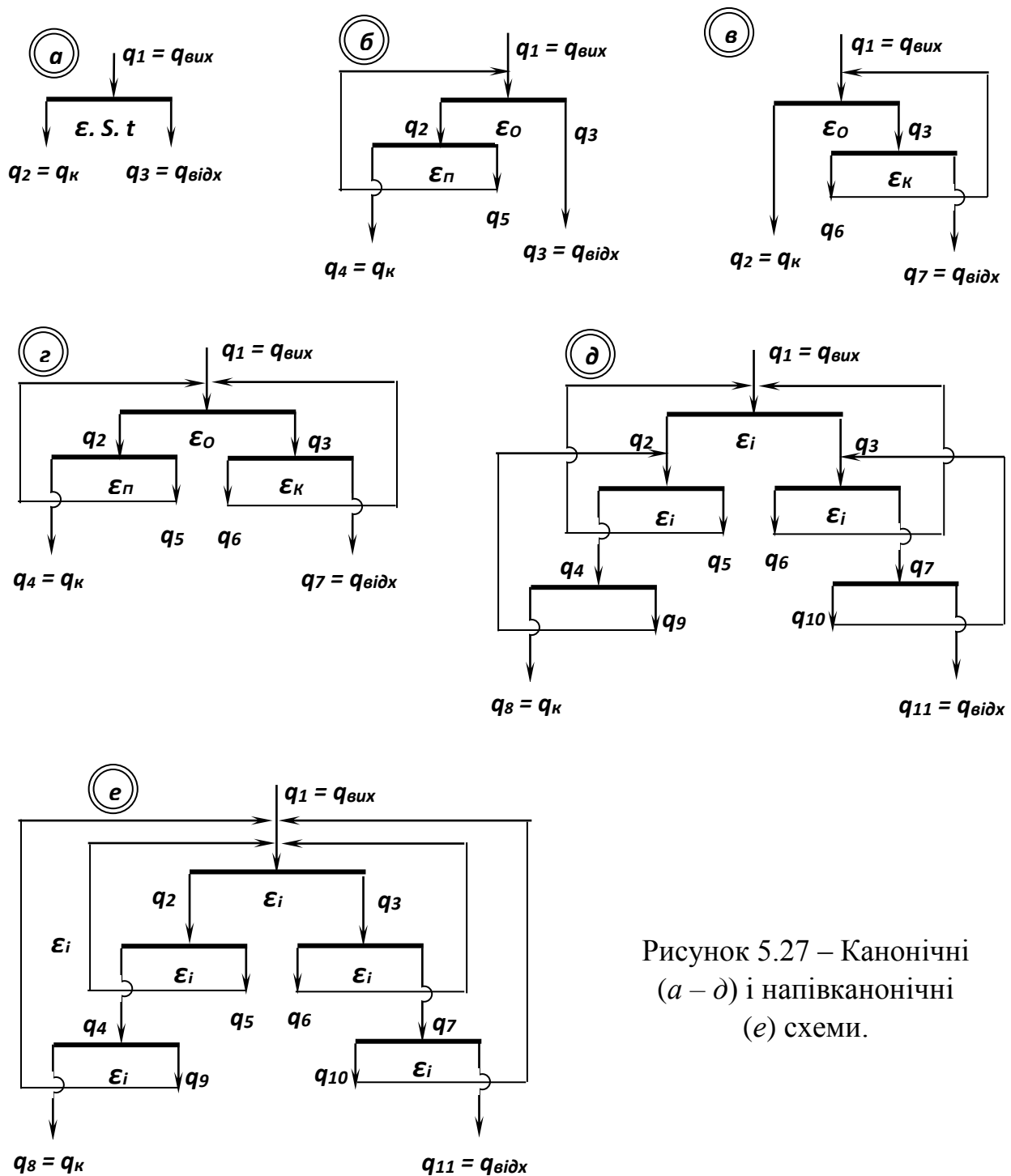


Рисунок 5.27 – Канонічні (а – д) і напівканонічні (е) схеми.

У загальному випадку результуюча сепараційна характеристика двопродуктової схеми є відношення мас (продуктивностей) елементарної фракції $[\xi, \xi + d\xi]$ в концентраті $q_k = Q_k \gamma_k(\xi) d\xi$ і вихідному живленні $q_{вих} = Q_{вих} \gamma_{вих}(\xi) d\xi$, тобто [18]:

$$\varepsilon_{рез} = q_k / q_{вих} = Q_k \gamma_k(\xi) d\xi / [Q_{вих} \gamma_{вих}(\xi) d\xi]. \quad (5.109)$$

Знання $\varepsilon_{рез}(\xi)$ дозволяє з цього рівняння визначити $\gamma_k(\xi)$, а також вміст j -го компонента в продукті:

$$\bar{\beta}_k = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta(\xi) \gamma_k(\xi) d\xi. \quad (5.110)$$

Для двох канонічних схем (рис. 5.27 б, з і д) результуючі сепараційні характеристики $\varepsilon_{рез}(\xi)$ отримують через часткові сепараційні характеристики $\varepsilon(\xi)$ окремих операцій:

– для схеми з однією основною $\varepsilon_O(\xi)$ і однією перечисною $\varepsilon_{II}(\xi)$ операціями (рис. 5.27 б):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{рез}(\xi) &= \varepsilon_{1,4}(\xi) = \varepsilon_O(\xi) \varepsilon_{II}(\xi) / D, \\ D &= 1 - \varepsilon_O(\xi) + \varepsilon_O(\xi) \varepsilon_{II}(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

– для схеми з однією основною $\varepsilon_O(\xi)$, однією перечисною $\varepsilon_{II}(\xi)$ і однією контрольною операціями (рис. 5.27 з):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{рез} &= \varepsilon_{1,4} = \varepsilon_O(\xi) \varepsilon_{II}(\xi), \\ D &= 1 - \varepsilon_O(\xi) + \varepsilon_O(\xi) \varepsilon_{II}(\xi) - \varepsilon_K(\xi) + \varepsilon_O(\xi) \varepsilon_K(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

– для схеми з однією основною $\varepsilon_O(\xi)$, двома перечисними $\varepsilon_{II_1}(\xi)$, $\varepsilon_{II_2}(\xi)$ і однією контрольною операціями (рис. 5.27 д):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{рез} &= \varepsilon_{1,8} = \varepsilon_O(\xi) \varepsilon_{II_1}(\xi) \varepsilon_{II_2}(\xi) / D, \end{aligned} \right\}$$

$$D = \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{П_1}(\xi)\varepsilon_{П_2}(\xi) + [(1 - \varepsilon_O(\xi))[(1 - \varepsilon_{K_1}(\xi))\{\varepsilon_{П_1}(\xi)\varepsilon_{П_2} + [1 - \varepsilon_{П_1}(\xi)]\varepsilon_{П_2} + [1 - \varepsilon_{П_1}(\xi)][1 - \varepsilon_{П_2}(\xi)]\}]] \quad (5.113)$$

Формули (5.111) - (5.113) одержані рішенням алгебраїчних рівнянь балансу по будь-якій елементарній фракції $[\xi, \xi + d\xi]$ для усіх продуктів схеми. Число таких рівнянь дорівнює подвоєному числу операцій в схемі. Для будь-якої i -тої операції маємо два рівняння:

– перше: сума вхідних потоків фракції дорівнює сумі вихідних:

$$q_{вих\ i} = q_{к\ i} + q_{відх\ i}; \quad (5.114)$$

– друге: потік фракції в концентраті дорівнює потоку її в живленні, помноженому на сепараційну характеристику:

$$q_{к\ i} = \varepsilon_i(\xi)q_{вих\ i}. \quad (5.115)$$

Іноді останню формулу з урахуванням того, що $q_{відх\ i} = (1 - \varepsilon_i)q_{вих\ i}$ можна переписати у вигляді:

$$q_{к\ i} / \varepsilon_i(\xi) = q_{відх\ i} / [1 - \varepsilon_i(\xi)]. \quad (5.116)$$

Склавши такі пари рівнянь для усіх операцій схеми і виключивши усі q_i для внутрішніх проміжних продуктів, розраховують відношення $q_{к} / q_{вих} = \varepsilon_{рез}(\xi)$.

Приклад 5.6. Необхідно розрахувати потоки схеми з трьома операціями (рис. 5.27 з). Рішення отримуємо склавши 6 рівнянь з 6 невідомими:

$$\left. \begin{aligned} q_2 + q_3 - q_5 - q_6 &= q_{вих}; \\ q_2 - q_K - q_5 &= 0; \\ q_3 - q_6 - q_7 &= 0; \\ q_2 - \varepsilon_O q_5 - \varepsilon_O q_6 &= \varepsilon_O q_{вих}; \\ \varepsilon_{II} q_2 - q_K &= 0; \\ \varepsilon_K q_3 - q_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

Рішення цих рівнянь дозволяє послідовно знайти:

$$\left. \begin{aligned} q_2(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_O / D; \\ q_3(\xi) &= q_{вих}(\xi) (1 - \varepsilon_O) / D; \\ q_K &= q_4(\xi) = q_{вих}(\xi) \varepsilon_O \varepsilon_{II} / D; \\ q_5(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_O (1 - \varepsilon_{II}) / D; \\ q_6(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_K (1 - \varepsilon_O) / D; \\ q_7(\xi) &= q_{вих}(\xi) (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_K) / D; \\ D &= (1 - \varepsilon_O - \varepsilon_K + \varepsilon_O \varepsilon_{II} + \varepsilon_O \varepsilon_K). \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Результуюча сепараційна характеристика визначається з третього рівняння як відношення $q_K / q_{вих} = \varepsilon_{рез}(\xi)$. Результуюча сепараційна характеристика (див. формулу 5.109) є необхідною і достатньою для оцінки і аналізу схеми в цілому.

Сепараційна характеристика $\varepsilon_{1i}(\xi)$ для будь-якого i -го продукту (по відношенню до вихідного живлення) знаходиться як відношення продуктивностей (мас) по фракції $[\xi, \xi + d\xi]$ в даному продукті і в живленні схеми, тобто:

$$\varepsilon_{1i} = q_i / q_1 = Q_i \gamma_i(\xi) d\xi / [Q_{вих} \gamma_{вих}(\xi) d\xi].$$

Для усіх продуктів схеми вона знаходиться рішенням лінійних алгебраїчних рівнянь аналогічно $\varepsilon_{рез}(\xi)$, яка є частковим випадком, коли $q_i = q_K$.

5.5.2 Аналіз сепараційних характеристик схем збагачення

Задачею аналізу є з'ясування впливу конфігурації схеми, типу сепараторів в операціях та їхніх параметрів на $\varepsilon_{рез}(\xi)$ і $\varepsilon_{1i}(\xi)$.

Сепараційні характеристики $\varepsilon_{рез}(\xi)$ і $\varepsilon_{1i}(\xi)$ для конкретної схеми збагачення – гравітаційної, магнітної, флотаційної та ін. – отримують підстановкою сепараційних характеристик конкретних апаратів (або

операцій) $\varepsilon_O(\xi)$, $\varepsilon_{Pi}(\xi)$, $\varepsilon_{Ki}(\xi)$ схеми (див. Табл. 4.8) в загальні формули для $\varepsilon_{рез}(\xi)$ і $\varepsilon_{1i}(\xi)$.

Приклад 5.7. Для гравітаційної схеми з однією перечисткою $n = 1$, $\kappa = 0$ (див. Рис. 5.26 б) з окремими сепараційними характеристиками операцій для відсаджувальних машин або важкосередовищних сепараторів за формулою (5.109) отримуємо:

$$\varepsilon_{рез}(\rho) = \frac{(0,5 + 0,5\Phi)^2}{0,75 + 0,25\Phi^2}, \quad (5.119)$$

де $\Phi = \Phi[(\rho - \rho_p) \sqrt{(\alpha D)^{-1} gh \gamma_{вих}(\rho)}]$.

Остаточну конкретизацію отримують при чисельному завданні усіх параметрів, зокрема $(\alpha D)^{-1} gh = 22,5 \text{ м}^3/\text{т}$; $\rho_p = 3 \text{ т}/\text{м}^3$.

Приклад 5.80. Для симетричної флотаційної схеми з однією перечисною $n = 1$ однією контрольною $\kappa = 1$ (див. Рис. 5.26 г) з ідентичними операціями $\varepsilon_O(k) = \varepsilon_{Pi}(k) = \varepsilon_K(k) = 1 - \exp(-St_\phi k)$ за формулою (5.109) одержимо:

$$\varepsilon_{рез}(k) = \frac{[1 - \exp(-St_\phi k)]^2}{1 - 2[1 - \exp(-St_\phi k)] + 2[1 - \exp(-St_\phi k)]^2}. \quad (5.120)$$

Конкретні параметри отриманого рівняння можуть мати такі значення: питома поверхня розділу фаз $S = 800 \text{ м}^2/\text{м}^3$; тривалість флотації $t_\phi = 2,5 \text{ хв}$.

З наведених прикладів видно, як можна отримати сепараційні характеристики будь-яких конкретних схем збагачення.

Графік або таблиця будь-якої сепараційної характеристики $\varepsilon_{рез}(\xi)$, $\varepsilon_{1i}(\xi)$ розраховуються в дискретних точках діапазону $\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$, напр., $\xi = 0, \Delta\xi, 2\Delta\xi, 3\Delta\xi$ і т.д.

На рис. 5.27 показані $\varepsilon_{рез}(\xi)$ для декількох флотаційних схем, при цьому для простоти порівняння прийняті однакові сепараційні характеристики в операціях $\varepsilon(k) = 1 - \exp(-x)$, $x = kSt_\phi$.

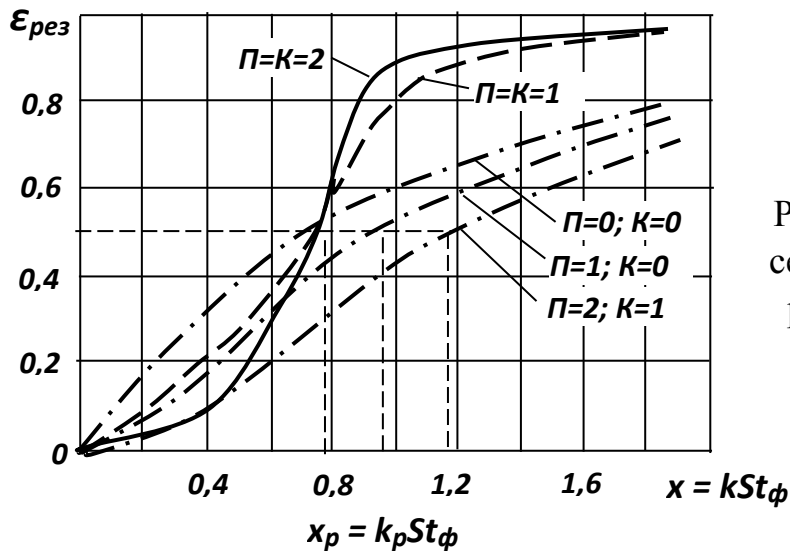


Рисунок 5.28 - Результуючі сепараційні характеристики різних флотаційних схем.

Важливими параметрами результатуючої характеристики схеми $\varepsilon_{рез}(\xi)$ є положення границі розділення ξ_p і крутизна в робочій точці $\varepsilon'_{рез}(\xi_p)$. Величина ξ_p є коренем рівняння $\varepsilon_{рез}(\xi_p) = 0,5$. Це рівняння не завжди легко вирішується, особливо для складних схем, тому на практиці краще користуватися графічним методом: побудувати графік, на ординаті $\varepsilon_{рез} = 0,5$ провести горизонтальну лінію до перетину з графіком і опустити перпендикуляр в шукану точку ξ_p .

Так, напр., з графіків $\varepsilon_{рез}(k)$ для флотаційних схем, наведених на рис. 5.27, у випадках симетричних схем $\Pi = K = 0$, $\Pi = K = 1$, $\Pi = K = 2$ одержуємо одне й теж значення флотованості розділення:

$$k_p = x_p / St_\phi = \ln 2 / (St_\phi) \approx 0,693 / (St_\phi).$$

Для несиметричної схеми $\Pi = 1$, $K = 0$ маємо $k_p \approx 0,95 / (St_\phi)$, а для схеми $\Pi = 2$, $K = 1$ отримуємо $k_p \approx 1,15 / (St_\phi)$.

Крутизна $\varepsilon'_{pez}(\xi_p)$ розраховується після знаходження ξ_p за формулою:

$$\varepsilon'_{pez}(\xi_p) = d\varepsilon_{pez}(\xi) / d\xi \big|_{\xi = \xi_p}. \quad (5.121)$$

Визначити цю величину можна за аналітичною формулою для $\varepsilon_{pez}(\xi)$ або графічним диференціюванням по тангенсу кута нахилу дотичної до $\varepsilon_{pez}(\xi)$ в робочій точці ξ_p .

Напр., для флотаційної схеми $\Pi = K = 1$ з $\varepsilon_{pez}(k)$ виду рівняння (5.120), $k_p = \ln 2 / (St_\phi)$ отримуємо:

$$\varepsilon'_{pez}(k_p) = St_\phi,$$

для симетричної флотаційної схеми $\Pi = K = 2$:

$$\varepsilon'_{pez}(k_p) = 1,5St_\phi.$$

Раніше для однієї операції флотації ($\Pi = K = 0$) крутизна була знайдена і складала $\varepsilon'_{pez}(k_p) = 0,5St_\phi$ (див. табл. 4.7).

Очевидно, що зі збільшенням числа перечисних і контрольних операцій крутизна росте, тобто $\varepsilon_{pez}(k)$ наближається до ідеальної ступінчастої. При доданні першої пари операцій ($\Pi = K = 1$) до основної операції крутизна для схеми збільшується удвічі (в порівнянні з однією основною флотацією), при доданні ще однієї пари операцій ($\Pi = K = 2$) крутизна збільшується утричі і т.д. Співвідношення між ростом крутизни і збільшенням числа перечисних і контрольних операцій справедливе тільки для симетричних схем ($\Pi = K$) та ідентичних операцій $\varepsilon_O(\xi) = \varepsilon_{\Pi i}(\xi) = \varepsilon_{K j}(\xi)$ і має вигляд:

$$\varepsilon'_{pez}(\xi_p) = (n+1)\varepsilon'_O(\xi_p), \quad (5.122)$$

де $\varepsilon'_O(\xi_p)$ – крутизна основної (та усіх інших) операцій.

Формула (5.122) справедлива для гравітаційних, магнітних, флотаційних та інших схем збагачення, за її допомогою по відомій крутизні $\varepsilon'_O(\xi_p)$ окремої операції легко отримати крутизну $\varepsilon'_{pez}(k_p)$ для

симетричної схеми в цілому з будь-яким $\Pi = K = n$. Доцільно користуватися формулою (5.122) і табл. 4.7, де наведені $\varepsilon'_O(\xi_p)$ для типових сепараторів.

Напр., формула (5.122) набуває вигляду:

– для гравітаційних схем з відсаджувальними машинами:

$$\varepsilon'_{рез}(\rho_p) = (n+1)\sqrt{gh/[2\pi\alpha D(\rho_{\max} - \rho_{\min})]}, \quad (5.123)$$

– для флотаційних схем:

$$\varepsilon'_{рез}(k_p) = 0,5(n+1)St_\phi. \quad (5.124)$$

Аналогічні формули можна отримати і для інших схем.

На жаль формула (5.122) придатна тільки для симетричних схем з ідентичними операціями ($\varepsilon_O = \varepsilon_{\Pi i} = \varepsilon_{K j}$), канонічних і напівканонічних. Для несиметричних схем і навіть для симетричних при неідентичних операціях використовують більш складні формули, що ускладнює аналіз.

Формули, які використовують:

– для канонічних схем з будь-яким числом перечисних і контрольних операцій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{рез}(\xi) &= A(\xi)/[A(\xi) + B(\xi)]; \\ A(\xi) &= \varepsilon_O \varepsilon_{\Pi 1} \dots \varepsilon_{\Pi \Pi} [(1 - \varepsilon_{K 1}) \dots (1 - \varepsilon_{K K}) + \\ &+ \varepsilon_{K 1} (1 - \varepsilon_{K 2}) \dots (1 - \varepsilon_{K K}) + \dots + \varepsilon_{K 1} \dots \varepsilon_{K K}]; \\ B(\xi) &= (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_{K 1}) \dots (1 - \varepsilon_{K K}) [\varepsilon_{\Pi 1} \dots \varepsilon_{\Pi \Pi} + \\ &+ (1 - \varepsilon_{\Pi 1}) \varepsilon_{\Pi 2} \dots \varepsilon_{\Pi \Pi} + (1 - \varepsilon_{\Pi 1}) \dots (1 - \varepsilon_{\Pi \Pi})]; \end{aligned} \quad (5.125)$$

– для напівканонічної схеми, в якій усі зворотні продукти повертаються в голову основної операції:

$$\varepsilon_{рез}(\xi) = \frac{\varepsilon_O \varepsilon_{\Pi 1} \varepsilon_{\Pi 2} \dots \varepsilon_{\Pi \Pi}}{\varepsilon_O \varepsilon_{\Pi 1} \varepsilon_{\Pi 2} \dots \varepsilon_{\Pi \Pi} + (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_{K 1}) (1 - \varepsilon_{K 2}) \dots (1 - \varepsilon_{K K})}. \quad (5.126)$$

5.5.3 Аналіз циркулюючих навантажень

Аналіз циркулюючих навантажень показано на прикладі симетричної схеми $\Pi = K = 1$ (рис. 5.26 з). Якщо для усіх операцій симетричної схеми флотації характеристики $\varepsilon_i(k)$ однакові, тобто якщо однакові добутки $S_i t_{\phi i} = St_{\phi}$, то схема в цілому є «збалансованою», і її результуюча сепараційна характеристика $\varepsilon_{pez}(k) = \varepsilon_{1,4}$ має флотованість $k_p = \ln 2 / (St_{\phi})$ і крутизну $\varepsilon'_{pez}(k_p) = 0,5(n+1)St_{\phi}$; $\varepsilon_{pez}(k)$ найбільш близька до ідеального ступінчастого закону $\varepsilon_{id}(k) = 1(k - k_p)$.

В іншому випадку, якщо $\varepsilon_i(k)$ для окремих операцій неоднакові, тобто $S_i t_{\phi i}$ відхиляються від середнього значення St_{ϕ} , то симетрична схема стає «незбалансованою», в результаті чого $\varepsilon_{pez}(k)$ сильніше відхиляється від $\varepsilon_{id}(k)$, а циркулюючі навантаження відхиляються від норми.

Сепараційні характеристики $\varepsilon_{1,5}(k)$ і $\varepsilon_{1,6}(k)$ для циркулюючих навантажень (продукти q_5 і q_6 рис. 5.26 з) мають такий вигляд [18]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1,5} = \varepsilon_{pez}(1 - \varepsilon_{\Pi}) / \varepsilon_{\Pi}; \\ \varepsilon_{1,6} = \varepsilon_{pez} \varepsilon_K (1 - \varepsilon_O) / (\varepsilon_O \varepsilon_{\Pi}), \end{cases} \quad (5.127)$$

де ε_{pez} розраховується за формулою (5.126).

В збалансованому режимі обидва циркулюючих потоки $q_5 = \varepsilon_{1,5} q_1$; $q_6 = \varepsilon_{1,6} q_1 = \varepsilon_{1,6} Q_{вих} \gamma_{вих}(k) dk$ ідентичні за фракційним складом, при цьому в них максимально вилучаються мінеральні частинки з флотованістю k , яка дорівнює флотованості розділення $k_p = x_p / S_{O t_{\phi O}} = \ln 2 / (S_{O t_{\phi O}})$. Флотованість розділення k_p визначається з графіків $\varepsilon_{pez}(k)$ за рівнянням $\varepsilon_{pez}(k_p) = 0,5$. В концентрат q_4 сепаруються переважно частинки з флотованістю $k > k_p$, а у відходи – частинки з флотованістю $k < k_p$.

При одночасному збільшенні фронтів перелісної і контрольної операцій циркулюючі потоки стають різними, при цьому $q_6(k) > q_5(k)$ для будь-якої фракції флотованості $[k, k + dk]$ при $0 < k < k_{\max}$ і будь-якому живленні $\gamma_{\text{вих}}(k)$.

Навпаки, при зменшенні фронтів перелісної і контрольної операцій циркулюючі потоки також стають різними, але $q_6(k) < q_5(k)$.

Обидва циркулюючих потоки суттєво зростають при зменшенні фронту перелісної і збільшенні фронту контрольної флотації.

В усіх незбалансованих режимах графік $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$ більше відхиляється від ступінчастої $\varepsilon_{i0}(k)$, ніж для збалансованого режиму.

В схемах $\Pi = K = 2$ (рис. 5.26 *д, е*) спостерігається різке збільшення циркулюючих потоків q_5 і q_6 при зменшенні фронтів перелісних і збільшенні фронтів контрольних операцій в порівнянні з фронтом основної операції. Циркулюючі потоки від Π перелісної і Π контрольної операцій коливаються менше.

Вихідні формули для $\varepsilon_{1,i}(k)$ канонічної і напівканонічної схем:

Для канонічної схеми $\Pi = K = 2$ (рис. 5.26 *д*):

– циркуляція від I перелісної і I контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,5} = q_5 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\Pi 1}) / \varepsilon_{\Pi 1} \varepsilon_{\Pi 2};$$

$$\varepsilon_{1,6} = q_6 / q_1 = \frac{\varepsilon_{\text{рез}} \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_O) [1 - \varepsilon_{\Pi 1} (1 - \varepsilon_{\Pi 2})]}{\varepsilon_O \varepsilon_{\Pi 1} \varepsilon_{\Pi 2} [1 - \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_{K1})]};$$

– циркуляція від II перелісної і II контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,9} = q_9 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\Pi 2}) / \varepsilon_{\Pi 2};$$

$$\varepsilon_{1,10} = q_{10} / q_1 = \frac{\varepsilon_{\text{рез}} (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_{K1}) \varepsilon_{K2} [1 - \varepsilon_{\Pi 1} (1 - \varepsilon_{\Pi 2})]}{\varepsilon_O \varepsilon_{\Pi 1} \varepsilon_{\Pi 2} [1 - \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_{K1})]}.$$

Для напівканонічної схеми $\Pi = K = 2$ (рис. 5.26 *е*):

– циркуляція від I перелічної і I контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,5} = q_5 / q_1 = \varepsilon_{рез} (1 - \varepsilon_{П1}) / \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2};$$

$$\varepsilon_{1,6} = q_6 / q_1 = \varepsilon_{рез} \varepsilon_{K1} (1 - \varepsilon_O) / \varepsilon_O \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2};$$

– циркуляція від II перелічної і II контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,9} = q_9 / q_1 = \varepsilon_{рез} (1 - \varepsilon_{П2}) / \varepsilon_{П2};$$

$$\varepsilon_{1,10} = q_{10} / q_1 = \varepsilon_{рез} \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_{K1}) (1 - \varepsilon_O) / \varepsilon_O \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2}.$$

В рівняннях для канонічної схеми $\varepsilon_{рез}$ розраховується за формулами (5.125), а для напівканонічної – за формулою (5.126).

5.6 Моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням ком'ютерних технологій

Комп'ютерна система планування експерименту, така як STATGRAPHICS Plus for Windows, істотно змінила практику моделювання. Якщо раніше це вважалося сферою обмеженого кола кваліфікованих професіоналів в математичній статистиці, які володіють у досить повному обсязі її тонкощами, то сьогодні планування стало доступне широкому колу фахівців в інших галузях знань, зокрема, у збагаченні корисних копалин. Працюючи з модулем планування експерименту Design of Experiment (DOE), дослідник отримує повну впевненість в тому, що проведений ним статистичний аналіз даних здійснюється найбільш коректним чином. Модуль DOE автоматично проводить дослідника через весь цикл планування експерименту. DOE допомагає сформулювати критерій оптимальності плану експерименту, пропонує ряд оптимальних планів і наводить всі необхідні табличні та графічні викладки на кожному етапі проведення експерименту.

У всіх видах експериментів результати та висновки залежать від кількості різнорідних і по-різному зібраних даних. Тому перша послуга, яку надає модуль DOE – це допомога в організації збору інформації про

досліджуваний процес, для чого передбачена можливість генерації великої кількості як стандартних , так і нестандартних робочих таблиць, їх редагування і роздрук (рис. 5.29).

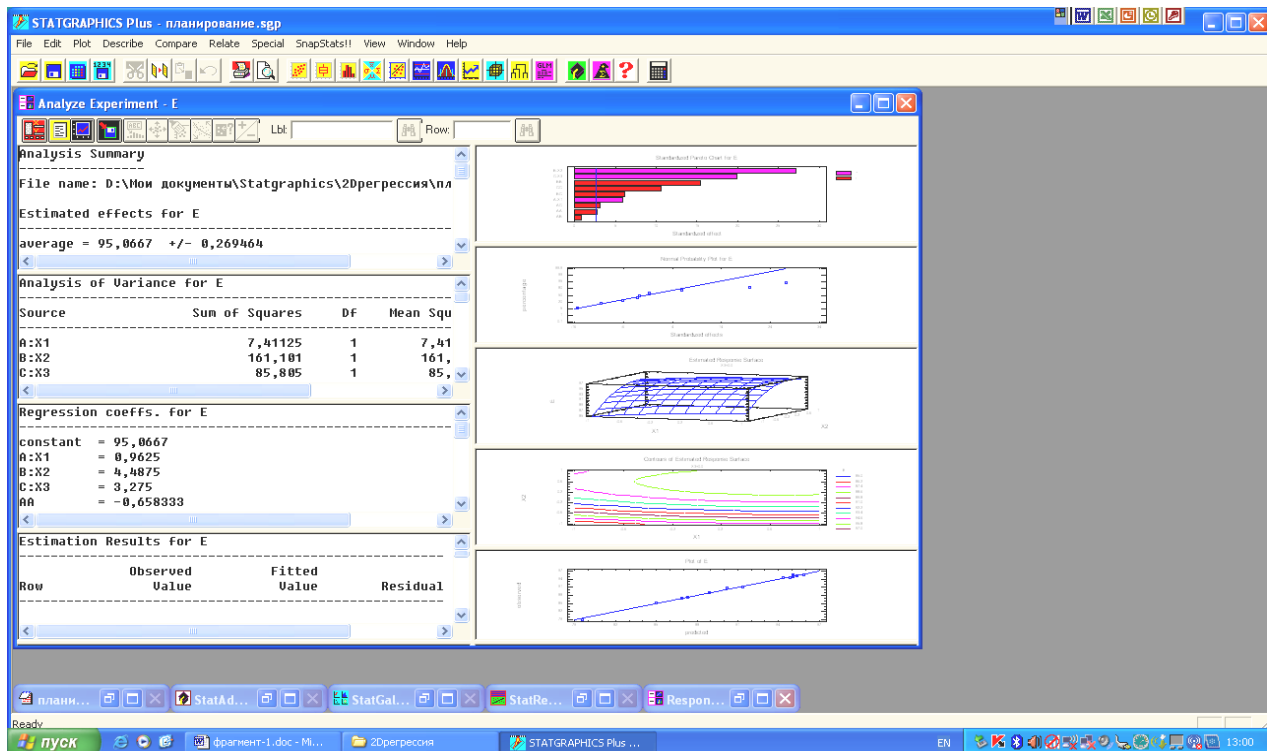


Рисунок 5.29 – Робочий інтерфейс програми Statgraphics при роботі в модулі DOE.

У плануванні експерименту значна увага приділяється способам відображення експериментальної інформації. У STATGRAPHICS включений весь спектр графічних процедур, які дозволяють підбирати, а також ясно і точно «простежувати» особливості аналізованого матеріалу, починаючи від карт Парето і до тривимірних поверхонь відгуку різного виду. При цьому всі графічні відображення є інтерактивними . Можна (як в автоматичному, так і ручному режимах) підібрати найбільш ілюстративні малюнки та графіки експериментальних планів, у супроводі відповідних чисельних результатів .

Модуль планування експерименту програми STATGRAPHICS Plus for Windows надає повний набір різних типів планів аж до тих , в яких враховуються взаємодії аналізованих факторів по восьмий порядок включно. Крім того, за бажанням експериментатора можуть бути розглянуті взаємодії більш високого порядку. Все це разом узятє, включаючи експертну консультативну систему StatAdvisor, що допомагає інтерпретувати результати і виявляти вади в проведеному аналізі, дозволяє

говорити про модуль DOE, як про високорозвинений інструмент, що суттєво підвищує ефективність планування експерименту .

Модуль DOE програмного пакету STATGRAPHICS широко використовується при дослідженні технологічних процесів збагачення корисних копалин. Більшість з цих процесів носять масовий статистичний характер і їхній опис неможливий без застосування методів математичної статистики . У більшості випадків завдання дослідника-збагачувача зводиться до розробки статистичної регресійної моделі процесу у вигляді поліноміальної залежності вихідного параметра (параметрів), званого цільовою функцією або параметром оптимізації від ряду вхідних.

Разом з тим, моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням комп'ютерних технологій являє собою окрему специфічну галузь знань і заслуговує на окремий – більш докладний розгляд в рамках спеціального видання.

5.7 Практика чисельного (комп'ютерного) моделювання

Комп'ютерне (або цифрове, чисельне) моделювання (digital simulation, Computer simulation) - дослідження об'єктів, зокрема технологічних процесів, пристроїв і систем за допомогою математичних моделей на комп'ютерах. Основні етапи комп'ютерного моделювання:

- розробка концептуальної моделі – феноменологічної і факторної моделі процесу;
- математичне моделювання (найпоширенішим є цифрове моделювання на основі створення моделей об'єктів плануванням експерименту);
- проведення комп'ютерних експериментів;
- аналіз та інтерпретація результатів.

Розрізняють аналітичне та імітаційне моделювання.

При аналітичному моделюванні одержують і вивчають математичні моделі реального об'єкта у вигляді алгебраїчних, диференціальних та інших рівнянь, а також передбачають здійснення однозначної обчислювальної процедури, що призводить до їх точного розв'язання.

При імітаційному моделюванні досліджують математичні моделі у вигляді алгоритму, що відтворює функціонування досліджуваної системи. Імітаційна модель – це логіко-математичний опис об'єкта, який може бути

використаний для експериментування на комп'ютері з метою проектування, аналізу і оцінки функціонування об'єкта.

Розглянемо більш докладніше порядок одержання математичної моделі.

Нехай експериментальне дослідження якоїсь невідомої закономірності $y = f(x)$ дає результати спостережень у вигляді таблиці відповідних значень x_i і y_i . З використанням цих значень можна побудувати криву залежності $y(x)$. Цю ж залежність на основі теоретичних уявлень про характер дослідженого процесу можна приблизно представити емпіричною формулою $y = \varphi(x)$. Очевидно, що вибір емпіричної формули диктується умовою найкращого приближення $\varphi(x)$ до $f(x)$ в деякому інтервалі $\alpha \leq x \leq \beta$.

Функцію $f(x)$ можна виразити різними емпіричними формулами. В деяких задачах за $\varphi(x)$ вибирають функцію, для якої в заданому інтервалі $\alpha \leq x \leq \beta$ найбільше значення величини $|f(x) - \varphi(x)|$ буде менше, ніж при виборі будь якої іншої емпіричної формули. Більш зручно виконувати оцінку наближення за методом найменших квадратів.

5.7.1 Степеневі і показникові функції

В багатьох випадках хід досліджуваного явища добре описується степеневою і показниковою функцією або многочленом.

Многочлен степені n має наступний вигляд:

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + mx^n. \quad (5.128)$$

В окремих випадках він може мати вигляд:

$$y - k = m(x - l)^n. \quad (5.129)$$

При $n = 1$ многочлен

$$\text{або} \quad \left. \begin{array}{l} y = mx \\ y = a + mx \end{array} \right\} \quad (5.130)$$

геометрично виражається прямою лінією.

При n цілому і більшому одиниці рівняння (5.128) являє собою криву параболічного типу з вершиною у точці (l, k) . Частковими формами цього рівняння є:

$$\left. \begin{array}{l} y = mx^n \\ y = a + mx^n \end{array} \right\} \quad (5.131)$$

При $n < 0$ рівняння (5.128) являє собою криву гіперболічного типу. Частковими формами цього рівняння є:

$$\left. \begin{array}{l} xy = a; \\ y = \frac{a}{x^n}; \\ y = \frac{a}{x^n} + b; \\ xy = bx + ay; \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1. \end{array} \right\} \quad (5.132)$$

Функціональна залежність, яка характеризується $\frac{dy}{dx} = ky$ зображується показовою функцією виду:

$$\left. \begin{array}{l} y = ab^x; \\ y = ae^{bx}. \end{array} \right\} \quad (5.133)$$

В більш складних випадках іноді зручніше представити емпіричну залежність в формі:

$$\varphi(x) = a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \dots \quad (5.134)$$

Якщо емпіричну функцію $\varphi(x)$ узяти у вигляді многочлену степеню n :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (5.135)$$

то при збільшенні степеню цього многочлена можна досягнути будь якого ступеня наближення і навіть повної збіжності між дослідними даними і формулою.

5.7.2 Вибір емпіричної формули. Метод вирівнювання

В деяких випадках вибір типу емпіричної формули може бути здійснений на основі теоретичних уявлень про характер дослідженої залежності. В інших випадках вдається підібрати таку формулу порівнянням кривий, побудованої по даним досліджень, із зразками відомих типових кривих (табл. 5.22). Іноді емпірична крива схожа на декілька кривих, рівняння яких різні. З іншого боку бувають випадки, коли та або інша емпірична формула достатньо точно відображає залежність між заданими чисельними значеннями величин, але типовий графік цієї формули зовсім не схожий на експериментальну криву. Це може мати місце, коли крива і графік формули побудовані для різних проміжків змінення аргументу. Змінення чисельних значень коефіцієнтів, що входять у формулу, часто різко змінюють вид її графіка. Вибір масштабу координатних осей відображується на формі побудованої кривий, що також може привести до враження про відмінність експериментальній кривій від графіка формули, яка їй цілком відповідає.

Тому раніше, чим визначати чисельні значення коефіцієнтів у вибраній емпіричній формулі, необхідно перевірити можливість її використання *методом вирівнювання*. Тільки після цього можна перейти до визначення тих значень постійних коефіцієнтів, які дозволять отримати найкраще наближення дослідних і розрахованих величин.

Метод вирівнювання (табл. 5.22) полягає у перетворенні функції $y = \varphi(x)$ таким чином, щоб перетворити її в лінійну функцію. Досягається це заміною перемінних x і y новими перемінними $X = \psi(x, y)$ і $Y = \xi(x, y)$, які вибираються так, щоб виходило рівняння прямої лінії:

$$Y = A + BX \quad (5.136)$$

Розраховані значення X_i і Y_i відповідно заданих x_i і y_i наносять на діаграму з прямокутними координатами (X, Y) . Якщо побудовані таким чином точки розташовуються поблизу прямої лінії, вибрана формула $y = \varphi(x)$ підходить для характеристики залежності $y = f(x)$.

5.7.3 Визначення коефіцієнтів емпіричної формули. Спосіб середніх

Після встановлення придатності вибраної формули для відображення дослідженої залежності перемінних необхідно визначити чисельні значення коефіцієнтів, які входять у формулу. Найкращі результати дає використання способу найменших квадратів. Однак цей спосіб громіздкий. Тому в багатьох випадках його можна замінити більш простим *способом середніх*, який дає менш точні, але достатньо задовільні результати. Спосіб середніх полягає у наступному: після використання метода вирівнювання і отримання лінійної залежності (5.136) складають умовні рівняння $Y_i = A + BX_i$, число n яких дорівнює числу відповідних значень X_i і Y_i , які існують. Умовні рівняння розділяють на дві приблизно рівні групи. Групування рівнянь звичайно виконують в послідовності дослідних даних. Рівняння, що входять у кожную групу, складають і отримують два підсумкових рівняння (5.137):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k Y_i &= kA + B \sum_{i=1}^k X_i; \\ \sum_{i=k+1}^n Y_i &= (n-k)A + B \sum_{i=k+1}^n X_i \end{aligned} \right\} \quad (5.137)$$

При сумісному вирішенні рівнянь (5.137) знаходять невідомі коефіцієнти A і B .

Приклад 5.22. В результаті досліджень отримані експериментальні дані залежності параметра X від параметра Y (табл. X.3).

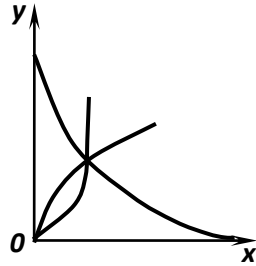
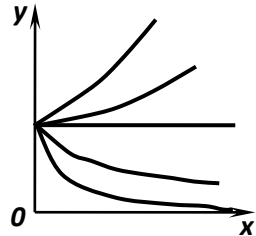
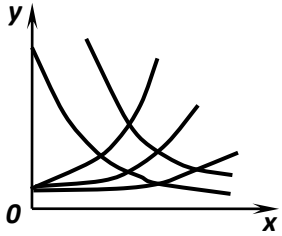
Таблиця X.3 – Експериментальні дані

x	273	283	288	293	313	333	353	373
y	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

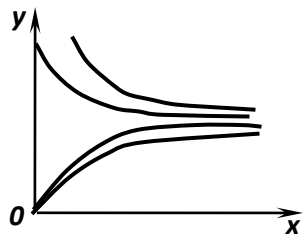
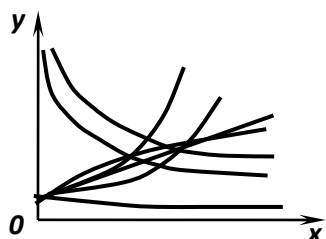
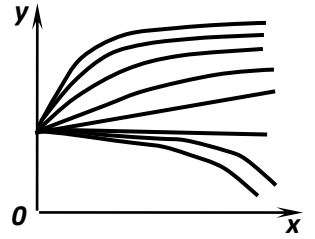
Необхідно вибрати емпіричну формулу, яка найточніше описує отриману експериментальну залежність.

Рішення. Емпіричну формулу будьмо вибрати з залежностей 1 – 7 (табл. X.2) у відповідності до наведених рекомендацій. Результати розрахунків наведені в табл. X.4.

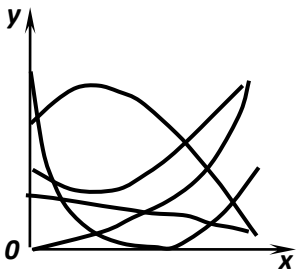
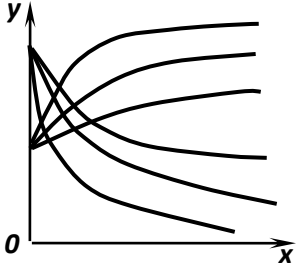
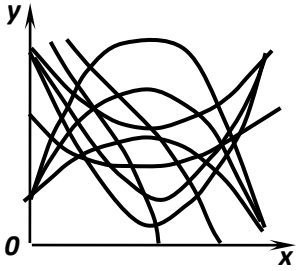
Таблиця 5.22 – Графіки формул і способи їх вирівнювання

№	Типові криві	Формула	Способи вирівнювання	Лінійне рівняння, отримане при вирівнюванні	Примітка
1	2	3	4	5	6
I		$y = ax^b$ (графік для $a = const$)	$X = \lg x$ $Y = \lg y$	$Y = \lg a + bX$	
II		$y = ae^{bx}$ (графік для $a = const$)	$Y = \lg y$	$Y = \lg a + 0,4343bX$	$0,4343 = \lg e$
III		$y = \frac{1}{a + bx}$	$Y = \frac{1}{y}$	$Y = a + bX$	

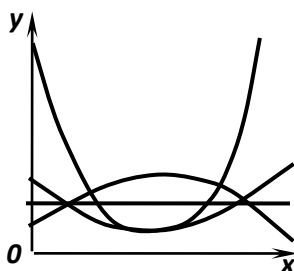
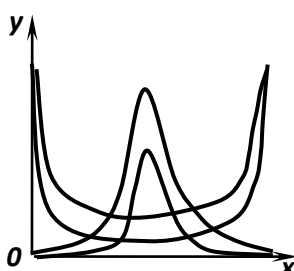
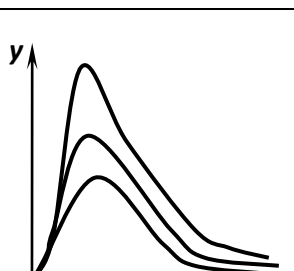
Продовження таблиці 5.22

1	2	3	4	5	6
IV		$y = \frac{x}{a + bx}$	$Y = \frac{x}{y}$	$Y = a + bX$	
V		$y = c + ax^b$	Якщо b відоме: $X = x^b$. Якщо b невідоме, визначають c (див. примітку) і тоді $X = \lg x$ $Y = \lg(y - c)$	$y = c + aX$ $Y = \lg a + bX$	Криві аналогічні кривим I, але зміщені в напрямку осі ОУ. Для визначення C на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами x_1 і x_2 і відповідними ординатами y_1 і y_2 та третю точку з абсцисою $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ і ординатою y_3 : $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$ При $b = 1$ рівняння V перетворюється на лінійне: $y = c + ax$.
VI		$y = c + ae^{bx}$ (графік для $c = \text{const}$, $a < 0$)	Визначають c (див. примітку) і тоді $Y = \lg(y - c)$	$Y = \lg a + 0,4343bX$	Криві аналогічні кривим II, але зміщені в напрямку осі ОУ. Для визначення C на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами x_1 і x_2 і відповідними ординатами y_1 і y_2 та третю точку з абсцисою $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ і ординатою y_3 : $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$

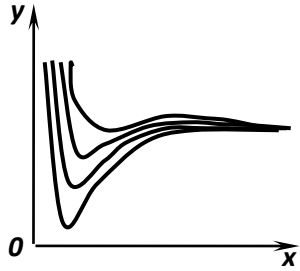
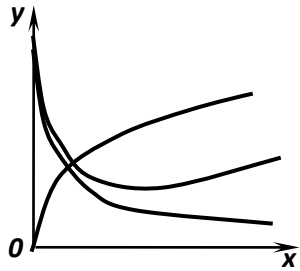
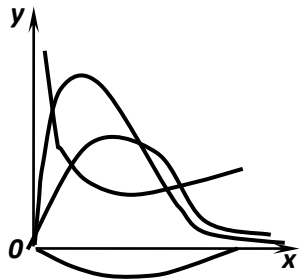
Продовження таблиці 5.22

1	2	3	4	5	6
VII		$y = a + bx + cx^2$	$Y = \frac{y - y_1}{x - x_1},$ <p>де x_1 і y_1 – координати будь якої точки заданої кривої. При виборі значень x, які створюють арифметичну прогресію з різницею h</p> $Y = \Delta y = y_{i+1} - y_i$	$Y = (b + cx_1) + cx$ $Y = (bh + ch^2) + 2chx$	<p>Після визначення b і c знаходять a з рівняння</p> $\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2,$ <p>де n число заданих значень x.</p>
VIII		$y = \frac{a + bx}{c + dx}$	$Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}$	$Y = A + Bx$	<p>Замість коефіцієнтів a, b, c і d визначають A і B та висувають емпіричну формулу у вигляді</p> $y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}.$
IX		$y^2 = a + bx + cx^2$			<p>Введенням нової перемінної $Z = y^2$ приходять до формули VI.</p>

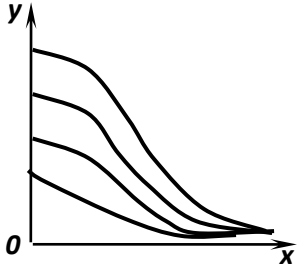
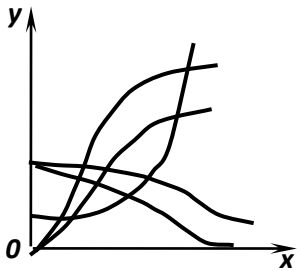
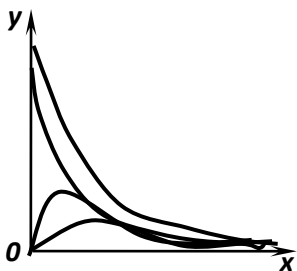
Продовження таблиці 5.22

1	2	3	4	5	6
X		$y = ae^{bx+cx^2}$			Введенням нової перемінної $Z = \lg y$ приходять до формули VII.
XI		$y = \frac{1}{a + bx + cx^2}$			Введенням нової перемінної $Z = x/y$ приходять до формули VII.
XII		$y = \frac{x}{a + bx + cx^2}$			Введенням нової перемінної $Z = x/y$ приходять до формули VII.

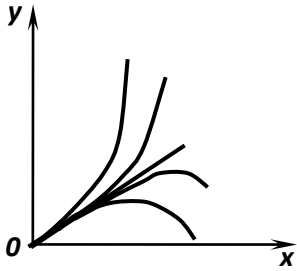
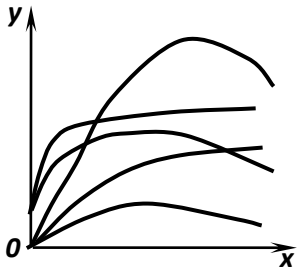
Продовження таблиці 5.22

1	2	3	4	5	6
XIII		$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$			Введенням нової перемінної $Z = 1/x$ приходять до формули VII.
XIV		$y = a + b \lg x + c \lg^2 x$			Введенням нової перемінної $Z = \lg x$ приходять до формули VII
XV		$y = ax^b e^{cx}$	При виборі значень x , які створюють арифметичну прогресію з різницею h $X = \Delta \lg x$ $Y = \Delta \lg y$	$Y = 0,4343hc + bX$	Після визначення b і c знаходять a з рівняння $\sum \lg y = n \lg a + b \sum \lg x + 0,4343c \sum x$ де n число заданих значень x .

Продовження таблиці 5.22

1	2	3	4	5	6
XVI		$y = ae^{bx^c}$			Введенням нової перемінної $Z = \lg y$ приходять до формули V.
XVII		$y = ae^{be^{cx}}$			Введенням нової перемінної $Z = \lg y$ приходять до формули VI.
XVIII		$y = ae^{bx} + ce^{dx}$	При виборі значень x , які створюють арифметичну прогресію з різницею h $X = y_1/y$ $Y = y_2/y$, де y, y_1, y_2 – ординати точок кривій для послідовних абсцис x, x_1, x_2	$Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh} \cdot e^{dh}$	Наведене в попередньому стовбці лінійне рівняння дозволяє визначити коефіцієнти b і d , після чого для визначення a і c знов виконують вирівнювання за допомогою перемінних $X = e^{(b-d)x}, Y = ye^{-dx}$ і отримують лінійне рівняння $Y = c + aX$.

Продовження таблиці 5.22

1	2	3	4	5	6
XIX		$y = a + bx + ce^{dx}$ (график для $a = const$, $b = const$)	При виборі значень x , які створюють арифметичну прогресію з різницею h $Y = \lg A^2 y$	$Y = \lg c(e^{dh} - 1)^2 + 0,4343dx$	Після визначення коефіцієнтів c і d виконують нове вирівнювання за допомогою $Y = y - ce^{dx}$ і отримують лінійне рівняння $Y = a + bx$, з якого визначають a і b .
XX		$y = ax^b + cx^d$ (график для $b > 0$, $d > 0$)	$X = \frac{y_1}{y}, Y = \frac{y_2}{y}$ де y, y_1 і y_2 – ординати точок кривої для будь яких послідовних значень абсцис x, x_1 і x_2 , які створюють геометричну прогресію з знаменником q	$Y = (q^b + q^d)X - q^{b+d}$	Після визначення коефіцієнтів b і d виконують нове вирівнювання за допомогою $X = x^{d-b}, Y = yx^{-b}$ і отримують лінійне рівняння $Y = a + cX$ з якого визначають a і c .
XXI	Графіки кривих можуть мати різну форму	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$	$Y = \Delta^{n-1}y$, де порядок, який дає постійне значення різностей при значеннях аргумента, які арифметичну прогресію з різницею h	$Y = (n-1)h^{n-1} \times (a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ha_n) + h!h^{n-1}a_nx$	З рівняння попереднього стовпця визначають коефіцієнти a_n і a_{n-1} при вищих степенях x . Потім з думки, що $Z = y - a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1}$, складають нову раціональну функцію степені $n-2$: $Z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-2}x^{n-2}$ і тим же способом визначають a_{n-2}, a_{n-3} і т.д. Многочлени вище 4-ой степені використовуються рідко, тому звичайно після першого визначення коефіцієнтів при вищих степенях x (a_4 і a_3) приводять до формули VII.

Примітки.

1. Пояснення до таблиці 5.22.

Перший стовпець таблиці – умовний порядковий номер залежності. Другий стовпець містить графіки функцій, наведених у третьому стовпці. Для кожної функції побудовано декілька кривих, які відповідають різним значенням постійних коефіцієнтів. При виборі формули слід враховувати, що емпірична крива може бути подібна тільки частині типовій кривій у деяких межах аргументу. Це є достатньо для застосування формули в даних межах. В четвертому стовпці таблиці вказані способи заміни перемінних, які приводять до вирівнювання функціональної залежності, а в п'ятому стовпці – вид отриманій після вирівнювання лінійної залежності. В останньому стовпці наведені примітки, які відносяться до методів визначення постійних коефіцієнтів, до способів перетворення формул і вторинного вирівнювання.

2. Формули, які найчастіше використовуються для описання залежностей між досліджуваними величинами:

$$\begin{array}{llllll} y = ax + b; & (1) & y = ab^x; & (3) & y = 1/(ax + b); & (5) & y = a \ln x + b. & (7) \\ y = ax^b; & (2) & y = 1 + b/x; & (4) & y = x/(ax + b); & (6) \end{array}$$

Таблиця Х.2 – Простіші необхідні умови для наявності емпіричних залежностей **1 – 7**.

№	\bar{X}_s	\bar{Y}_s	Формула	Вирівнювання	№	\bar{X}_s	\bar{Y}_s	Формула	Вирівнювання
1	$(x_1+x_n)/2$	$(y_1+y_n)/2$	$y = ax + b$		5	$(x_1+x_n)/2$	$(y_1+y_n)/2$	$y = 1/(ax + b)$	$Y = \alpha x + b$ де $Y = 1/y$
2	$\sqrt{x_1 x_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ax^b$	$Y = \alpha + bX$ де $X = \lg x$, $Y = \lg y$, $\alpha = \lg a$	6	$2x_1 x_n / (x_1 + x_n)$	$2y_1 y_n / (y_1 + y_n)$	$y = x/(ax + b)$	$Y = \alpha x + b$ де $Y = x/y$
3	$(x_1+x_n)/2$	$(y_1+y_n)/2$	$y = ab^x$ або $y = ae^{\beta x}$, де $\beta = \ln b$	$Y = \alpha + \beta x$ де $Y = \lg y$, $\alpha = \lg a$, $\beta = \lg \beta$	7	$\sqrt{x_1 x_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = a \lg x + b$	$y = \alpha X + b$ де $X = \lg x$
4	$2x_1 x_n / (x_1 + x_n)$	$2y_1 y_n / (y_1 + y_n)$	$y = a + b/x$	$Y = \alpha x + b$ де $Y = xy$					

Таблиця Х.4 – Вибір емпіричної формули

Розрахункові		Експери- мент \tilde{y}	Різниця $\tilde{y} - \bar{y}$	Формула	Висновок
\bar{x}_s	\bar{y}_s				
$\frac{x_1 + x_n}{2} =$ $= \frac{273 + 373}{2} =$ $= 323$	$\frac{y_1 + y_n}{2} =$ $= \frac{29,4 + 77,3}{2} =$ $= 53,5$	50,5	2,85	$y = ax + b$	Мало підходить
$\sqrt{x_1 x_n} =$ $= \sqrt{273 \cdot 373} =$ $= 319,1$	$\sqrt{y_1 y_n} =$ $= \sqrt{29,4 \cdot 77,3} =$ $= 47,7$	48,7	1,0	$y = ax^b$	Підходить краще інших формул
$\frac{x_1 + x_n}{2} = 323$	$\sqrt{y_1 y_n} = 47,7$	50,5	2,8	$y = ab^x$	Мало підходить
$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} =$ $= 2 \cdot \frac{273 \cdot 373}{273 + 373} =$ $= 315,3$	$\frac{y_1 + y_n}{2} = 53,35$	46,9	6,45	$y = a + \frac{b}{x}$	Не підходить
$\frac{x_1 + x_n}{2} = 323$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} =$ $= 2 \cdot \frac{29,4 \cdot 77,3}{29,4 + 77,3} =$ $= 42,6$	50,5	7,9	$y = \frac{1}{ax + b}$	Не підходить
$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} = 315,3$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} = 42,6$	46,9	4,3	$y = \frac{x}{ax + b}$	Не підходить
$\sqrt{x_1 x_n} = 319,1$	$\frac{y_1 + y_n}{2} = 53,35$	48,7	4,65	$y = a \ln x + b$	Не підходить

На основі виконаного рішення слід прийняти степеневу залежність $y = ax^b$.

РОЗДІЛ 6

6.1 Методика розробки і аналізу регресійних моделей технологічних процесів переробки корисних копалин з використанням сучасних комп'ютерних програм

Комп'ютерна система планування експерименту, така як STATGRAPHICS Plus for Windows, істотно змінила практику моделювання. Якщо раніше це вважалося сферою обмеженого кола кваліфікованих професіоналів в математичній статистиці, які володіють у досить повному обсязі її тонкощами, то сьогодні планування стало доступне широкому колу фахівців в інших галузях знань, зокрема, у збагаченні корисних копалин. Працюючи з модулем планування експерименту Design of Experiment (DOE), дослідник отримує повну впевненість в тому, що проведений ним статистичний аналіз даних здійснюється найбільш коректним чином. Модуль DOE автоматично проводить дослідника через весь цикл планування експерименту. DOE допомагає сформулювати критерій оптимальності плану експерименту, пропонує ряд оптимальних планів і наводить всі необхідні табличні та графічні викладки на кожному етапі проведення експерименту.

У всіх видах експериментів результати та висновки залежать від кількості різнорідних і по-різному зібраних даних. Тому перша послуга, яку надає модуль DOE – це допомога в організації збору інформації про досліджуваний процес, для чого передбачена можливість генерації великої кількості як стандартних, так і нестандартних робочих таблиць, їх редагування і роз друк (рис. 6.1).

У плануванні експерименту значна увага приділяється способам відображення експериментальної інформації. У STATGRAPHICS включений весь спектр графічних процедур, які дозволяють підбирати, а також ясно і точно «простежувати» особливості аналізованого матеріалу, починаючи від карт Парето і до тривимірних поверхонь відгуку різного виду. При цьому всі графічні відображення є інтерактивними. Можна (як в автоматичному, так і ручному режимах) підібрати найбільш ілюстративні малюнки та графіки експериментальних планів, у супроводі відповідних чисельних результатів.

Модуль планування експерименту програми STATGRAPHICS Plus for Windows надає повний набір різних типів планів аж до тих, в яких враховуються взаємодії аналізованих факторів по восьмий порядок включно. Крім того, за бажанням експериментатора можуть бути розглянуті взаємодії більш високого порядку. Все це разом узятє, включаючи експертну консультативну систему StatAdvisor, що допомагає інтерпретувати результати і виявляти вади в проведеному аналізі, дозволяє говорити про модуль DOE, як про високорозвинений інструмент, що суттєво підвищує ефективність планування експерименту.

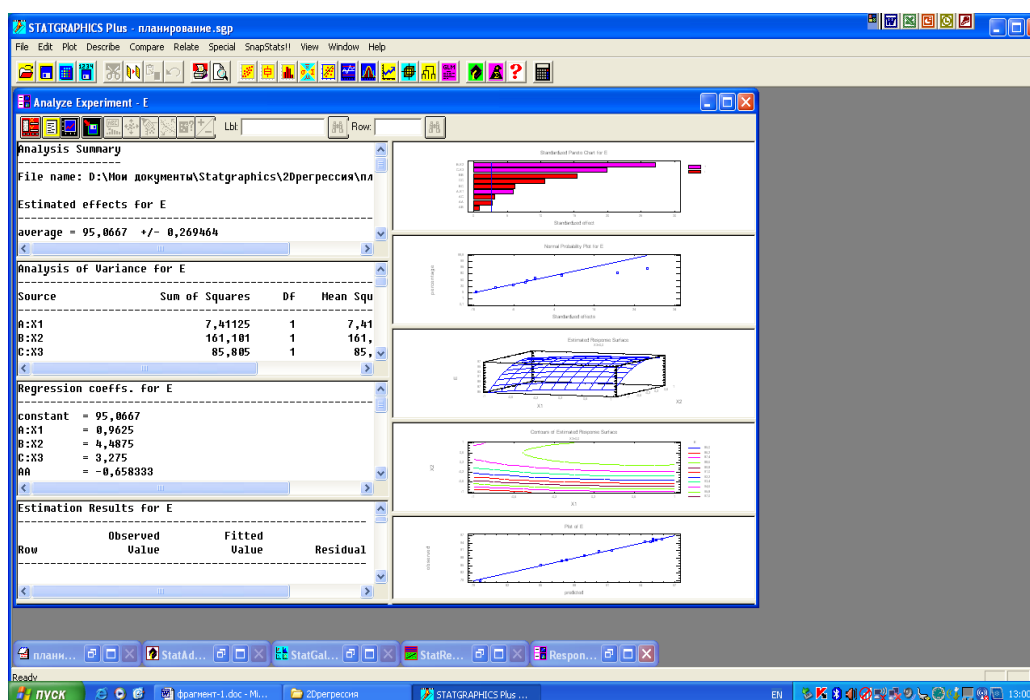


Рисунок 6.1 – Робочий інтерфейс програми Statgraphics при роботі в модулі DOE

Модуль DOE програмного пакету STATGRAPHICS широко використовується при дослідженні технологічних процесів первинної переробки (збагачення) корисних копалин. Більшість з цих процесів носять масовий статистичний характер і їхній опис неможливий без застосування методів математичної статистики. У більшості випадків завдання дослідника-збагачувача зводиться до розробки статистичної регресійної моделі процесу у вигляді поліноміальної залежності вихідного параметра(параметрів), званого цільовою функцією або параметром оптимізації від ряду вхідних.

Зауважимо, що моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням комп'ютерних технологій являє собою окрему специфічну галузь знань і заслуговує на окремий – більш докладний розгляд в рамках спеціального видання.

6.1.1 Повне факторне планування технологічних процесів на основі центрально-композиційних ротатабельних планів другого порядку

6.1.1.1 Загальні положення

Повним факторним експериментом (ПФЕ) називається такий експеримент, при реалізації якого визначається значення параметра оптимізації при всіх можливих поєднаннях рівнів варіювання факторів. Якщо ми маємо справу з k факторами, кожен з яких може встановлюватися на q рівнях, то для того, щоб здійснити повний факторний експеримент необхідно поставити $n = q^k$ дослідів.

Найбільшого поширення набули експерименти, в яких фактори варіюються на двох рівнях, тобто експерименти типу 2^k .

Планування, проведення та обробка результатів ПФЕ складається з наступних етапів: вибір залежних і незалежних змінних (факторів); кодування незалежних (вхідних) чинників; складання план-матриці експерименту; рандомізація дослідів (їх реалізація у випадковому порядку); реалізація плану експерименту; розрахунок і оцінка значимості коефіцієнтів моделі; перевірка адекватності отриманої моделі.

Вибір незалежних змінних. При дослідженні технологічних процесів дуже важливо виявити всі впливаючі фактори, а також оцінити ступінь їх впливу на процес. Якщо який-небудь із значущих чинників не включений в розгляд, але змінюється в деякому інтервалі значень, то похибки результатів експерименту різко зростають.

Наприклад, багатофакторність флотаційного процесу в значній мірі ускладнює його дослідження та математичний опис (моделювання), так як врахувати вплив усіх чинників практично неможливо, а статистичний аналіз, що не враховує хоча б один значимий фактор, обумовлює неадекватність регресійних рівнянь.

При вивченні будь-якого технологічного процесу доводиться розглядати велику кількість факторів, які імовірно можуть впливати на параметр оптимізації. З одного боку, включення в план дослідження всіх

істотно впливаючих факторів дуже важливо, так як експерименти, спрямовані на відшукування оптимальних умов, можуть втратити всякий сенс, якщо один або декілька таких факторів не враховані. З іншого боку, включення в програму дослідження всіх факторів, що впливають на об'єкт, ускладнює завдання – збільшує її розмірність. Ступінь впливу різних чинників на процес неоднакова; звичайно тільки декілька факторів істотно впливають на вихідну величину, а решта впливають менш суттєво.

Завдання полягає у виявленні та ідентифікації суттєвих факторів на «нульовому» тлі всіх інших, при цьому необхідно враховувати як якісні, так і кількісні характеристики впливаючих факторів. Наприклад, на процес флотації вугілля, як відомо, істотно впливають питомі витрати піноутворювача і збирача, проте при витратах аполярного збирача більше 2000 г / т і піноутворювача 100-300 г / т збільшення витрати збирача істотно не впливає на вихідні характеристики процесу. Таким чином, внаслідок невдалого вибору діапазону варіювання фактора він може бути ідентифікований як фон.

Вхідні фактори можуть мати і якісні відмінності, наприклад різні реагенти, конструкції тощо.

Вибір залежного фактора (параметра оптимізації, цільової функції, функції відгуку). Функція відгуку залежить від мети та специфіки досліджень. Вона може бути технологічною (вилучення металу або горючої маси в концентрат, коефіцієнт селективності тощо), економічною (прибуток, втрати, рентабельність тощо), статистичною і т. д. Відгук повинен бути чутливим до зміни факторів, легко обчислюваним, виражатися одним числом, мати фізичний зміст.

Кодування факторів необхідно для переведення натуральних значень факторів в безрозмірні величини. Це забезпечує можливість порівняльної оцінки впливу на процес різних параметрів незалежно від їх розмірності, а також дозволяє побудувати стандартну ортогональну план-матрицю експерименту.

Зв'язок між кодованим і натуральним виразом фактора задається формулою:

$$x_i = \frac{X_i - X_{io}}{\Delta X_i}, \quad (6.1)$$

де x_i – кодований вираз i -го фактора; X_i – натуральне значення фактора; X_{i0} – значення i -го фактора на нульовому рівні; ΔX_i – інтервал варіювання i -го фактора.

В якості нульового рівня факторів зазвичай вибирають центр інтервалу, в якому передбачається вести експеримент. У промислових умовах нульовий рівень відповідає значенням факторів при існуючому технологічному режимі.

При виборі інтервалу варіювання справа дещо складніша. Часто, особливо при оптимізації процесу, спочатку доцільно описати його лінійним рівнянням, і тому інтервал варіювання повинен бути досить малий для отримання лінійного рівняння, але разом з тим досить великий, щоб не отримати помилкового висновку про незначному впливі будь-якого з факторів.

Активне планування експерименту припускає проведення дослідів відповідно до плану експерименту. *План експерименту* визначає розташування досвідчених точок у *факторному просторі* (просторі незалежних змінних). План експерименту задається у вигляді *матриці плану*, наприклад у вигляді таблиці, кожен рядок якої відповідає умовам досвіду, а стовпець – значенням незалежної змінної в кожному досліді.

План-матриця експерименту пропонується безпосередньо самою програмою STATGRAPHICS залежно від виду розроблюваної регресійної моделі. У найпростішому випадку розглядається лінійна модель виду:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \quad (6.2)$$

де n – число вхідних факторів; Y – оцінка (розрахункове значення) відгуку (цільової функції); b – оцінки коефіцієнтів моделі.

У разі її неадекватності розглянутого процесу використовуються *поліноміальні плани другого порядку* виду:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \cdot x_i^2, \quad (6.3)$$

Найбільш часто застосовуються центральні-композиційні плани другого порядку. Їх отримують додаванням спеціальних «зоряних» точок до «ядра», що складається з плану 2^n для лінійної моделі, а також певної

кількості експериментів в центрі плану (при фіксації значень всіх вхідних параметрів на нульовому рівні). Зоряні точки встановлюються на деякій відстані d від центру, званому «зоряним плечем».

Серед центрально-композиційних планів другого порядку найбільшого поширення набули ротатабельні плани. Ці плани дають можливість передбачати значення функції відгуку з дисперсією (точністю), однаковою на рівних відстанях від центру плану (по всьому факторному простору).

Після складання план-матриці експериментів здійснюється реалізація відповідних їй дослідів. За результатами цих дослідів визначаються експериментальні значення цільової функції, які заносяться в план-матрицю експерименту порядково.

Наступні етапи планування експерименту здійснюються безпосередньо в модулі DOE програми STATGRAPHICS. Їх конкретний зміст розглянемо на прикладі.

6.1.1.2 Алгоритм досліджень і аналізу регресійних моделей

Розглянемо алгоритм планування експерименту на прикладі дослідження інтенсивної технології зневоднення вугільних флотоконцентратів вакуумним фільтруванням. Метою даних досліджень є розробка та аналіз регресійної моделі інтенсивної технології зневоднення вакуумним фільтруванням тонкодисперсного вугілля з використанням поверхнево-активних речовин (ПАР).

Розробка плану

Для розробки регресійної моделі застосований ротатабельний центральнокомпозиційний план експерименту. Функція відгуку – вологість вугілля W , зневодненого вакуумним фільтруванням. Досліджувався вплив на процес зневоднення чотирьох основних факторів, обраних на підставі апріорних даних: густини вихідної водовугільній суміші флотоконцентрату (X_1), зольності флотоконцентрату (X_2), величини вакуумметричного тиску (X_3) і витрати ПАР (X_4). Вибрані фактори задовольняють вимогам керованості, взаємнезалежності, однозначності, яким повинні задовольняти варіативні фактори при плануванні експерименту. Область факторного планування представлена в табл.6.1.

Двічі клацнувши на робочому столі комп'ютера на ярлику відкриємо вікно програми **STATGRAPHICS** (рис.6.1). Виберемо меню **Special | Experimental Design | Create Design**. Система відобразить вікно діалогу для завдання параметрів плану експерименту. Встановимо перемикач **Design Class** (тип плану) в положення **Response Surface** (поверхня відгуку). Введемо 1 в полі числа змінних відгуку. Занесемо 4 в поле кількості вхідних факторів. Заповнене вікно діалогу зображено на рис.6.2. Натиснемо кнопку **ОК**. На екрані з'явиться ще одне вікно діалогу для опису досліджуваних вхідних факторів.

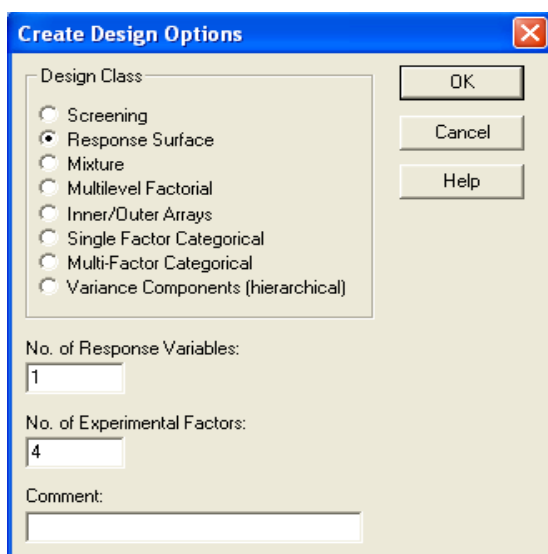


Рисунок 6.2 – Вікно діалогу для вибору параметрів

Таблиця 6.1 – Область факторного планування

Фактор	Код фактора	Одиниця виміру	Рівні факторів				
			-2	-1	0	+1	+2
Густина гідросуміші	X ₁	кг/м ³	100	150	200	250	300
Зольність флоконцентрата	X ₂	%	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0
Вакуумметричний тиск	X ₃	кПа	40	50	60	70	80
Витрати ПАР	X ₄	г/т	0	50	100	150	200

Для фактора **A** введемо ім'я **X1** і кодовані значення верхнього рівня (+1) і нижнього рівня (-1).

Виберемо положення перемикача **B** (фактор **B**). Для фактора **B** введемо ім'я **X2** і кодовані значення верхнього рівня (+1) і нижнього рівня (-1).

Аналогічним чином задамо імена і значення верхнього та нижнього рівня для двох, що залишилися факторів (**X3** і **X4**) – див.рис.6.3.

Натискаємо кнопку **ОК**. На екрані з'явиться вікно діалогу для опису функції відгуку. Введемо позначення відгуку **W** (вологість), а також його розмірність (%) - див. рис. 6.4.

Натиснемо кнопку **ОК**. На екрані з'явиться діалогове вікно з параметрами поверхні відгуку (див. рис.6.5). Використовуючи кнопку зі стрілкою вниз, розгорнемо список передбачуваних варіантів, виберемо **central composite design: 2 ^ 4 + star** (центрально-композиційний план 2 ^ 4 + зірка) і натиснемо кнопку **ОК**.

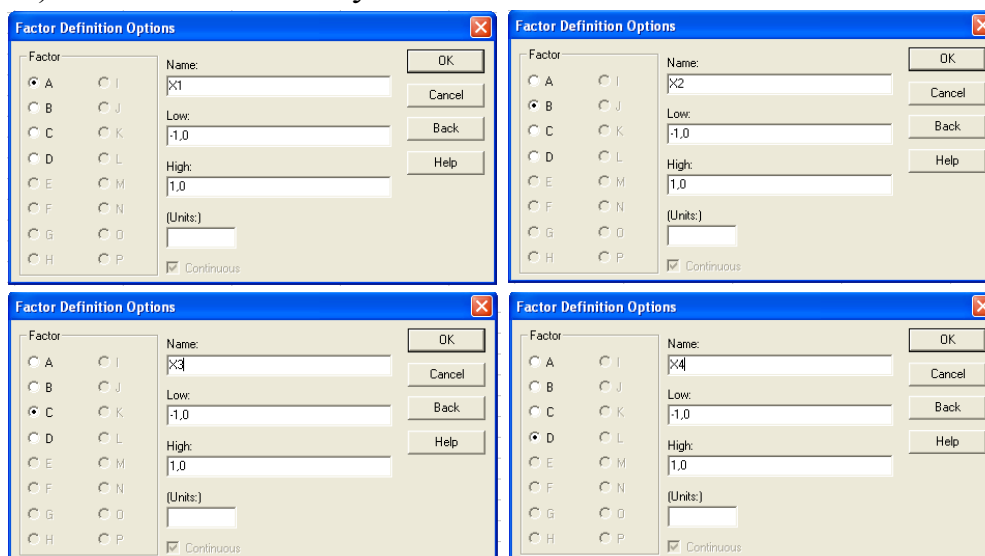


Рисунок 6.3 – Вікна діалогів для опису вхідних факторів.

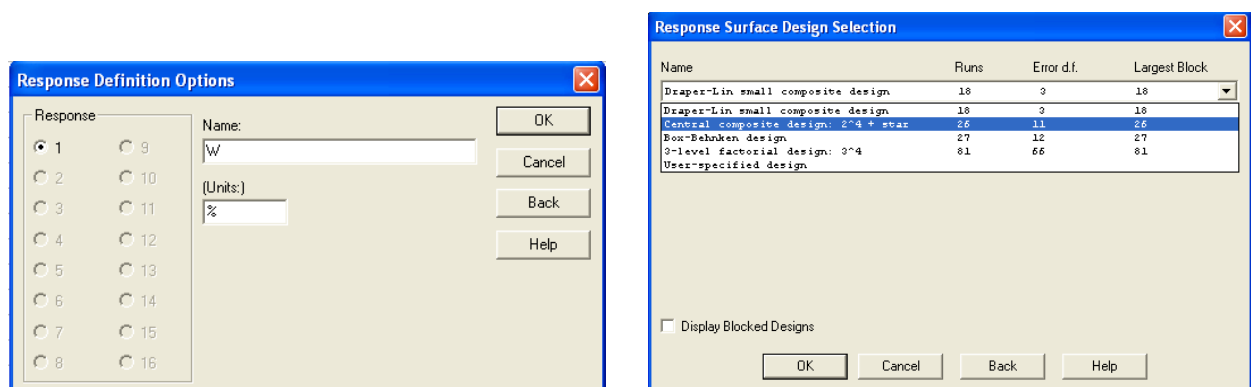


Рисунок 6.4 – Вікно діалогу для опису функції відгуку.

Рисунок 6.5 – Вікно діалогу з параметрами поверхні відгуку.

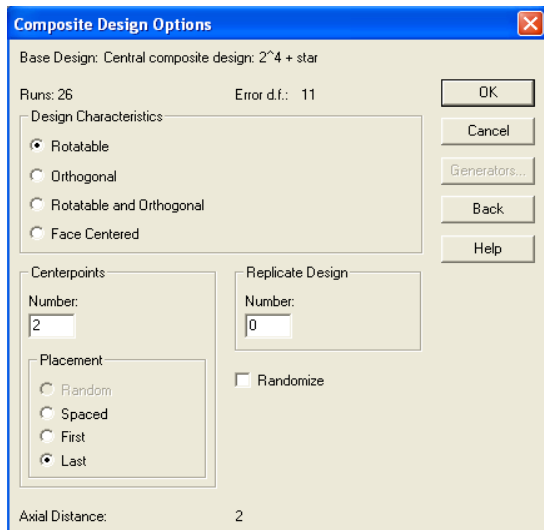


Рисунок 6.6 – Опції вибраного композиційного плану.

(наприкінці) і знімемо прапорець **Randomise** (рандомізація). Кількість експериментів в центрі плану залишимо без змін (2 досліди). У нижній частині вікна наведено значення «зоряного плеча», яке для наших умов становить 2.

Натиснемо кнопку **OK**. Система видасть зведення експериментального плану у вікні атрибутів поверхні відгуку (рис.6.7).

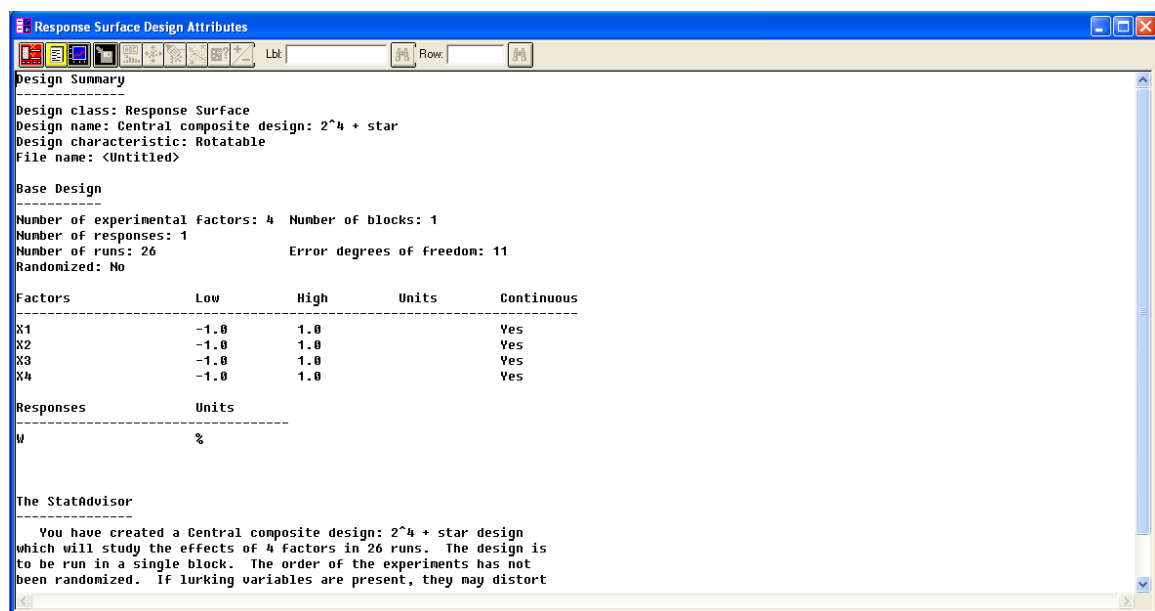


Рисунок 6.7- Зведення у вікні атрибутів поверхні відгуку.

Зведення включає ім'я плану і його тип, а також коментарі до експерименту. Тут же наведена інформація про фактори, відгуку, кількості

експериментів, числі блоків, кількість центральних точок і ступенях свободи для помилки.

Завдання імені, збереження плану експерименту і роздрукування робочої таблиці

Виберемо **File | Save Design File As**, з'явиться відповідне вікно діалогу (рис.6.8). Задамо ім'я плану **Зневоднення-1.sfx** в папці **Зневоднення-1** і натиснемо кнопку **OK**.

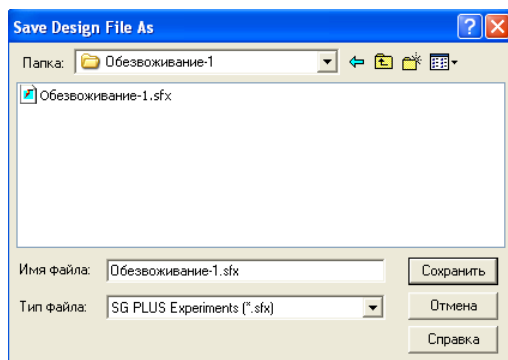


Рисунок 6.8 – Задання назви експериментального плану.

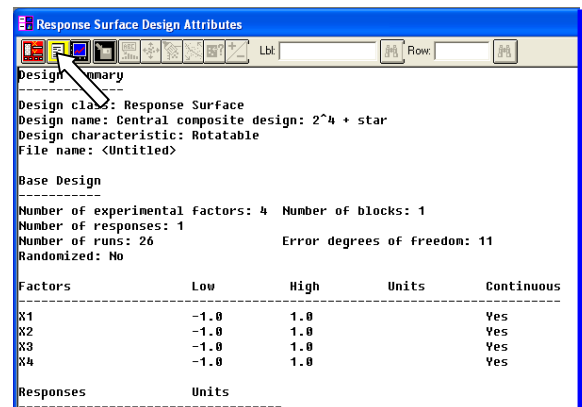


Рисунок 6.9 – Вікно атрибутів поверхні відгуку.

Інженер-збагачувач тепер готовий продовжити свій експеримент і почати збирати дані. Насамперед необхідно роздрукувати робочу таблицю, в якій зазначений порядок проведення експериментів. У вікні атрибутів поверхні відгуку натиснемо кнопку табличних опцій (рис. 6.9). У вікні діалогу встановимо прапорець **Worksheet** (робоча таблиця), знімемо прапорець **Design Summary** (зведення плану) і натиснемо кнопку **OK** (рис.6.10). Робоча таблиця відобразиться у другому вікні на пої аналізу. Двічі натиснемо на заголовок вікна робочої таблиці і тим самим максимізуємо її розміри (див. рис.6.11).

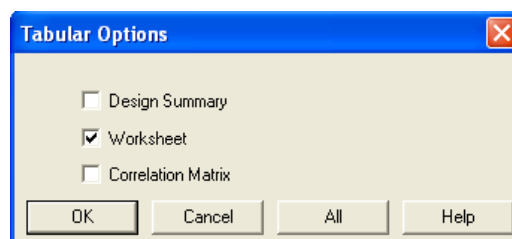


Рисунок 6.10 – Вікно діалога для відображення робочої таблиці.

Run	X1	X2	X3	X4	V (%)
1	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	_____
2	1,0	-1,0	-1,0	-1,0	_____
3	-1,0	1,0	-1,0	-1,0	_____
4	1,0	1,0	-1,0	-1,0	_____
5	-1,0	-1,0	1,0	-1,0	_____
6	1,0	-1,0	1,0	-1,0	_____
7	-1,0	1,0	1,0	-1,0	_____
8	1,0	1,0	1,0	-1,0	_____
9	-1,0	-1,0	-1,0	1,0	_____
10	1,0	-1,0	-1,0	1,0	_____
11	-1,0	1,0	-1,0	1,0	_____
12	1,0	1,0	-1,0	1,0	_____
13	-1,0	-1,0	1,0	1,0	_____
14	1,0	-1,0	1,0	1,0	_____

Рисунок 6.11 – Робоча таблиця плану експерименту.

Виберемо з меню **File | Print** - система надає вікно діалогу для роздруківки плану експерименту, що проводиться. Встановимо перемикач в положення **All Text Panes** (рис.6.12) і натиснемо кнопку **OK**. Система роздрукує зведення проведеного аналізу і робочу таблицю для збору даних.

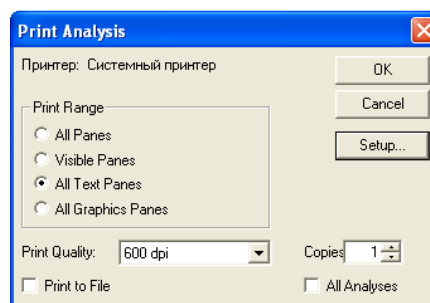
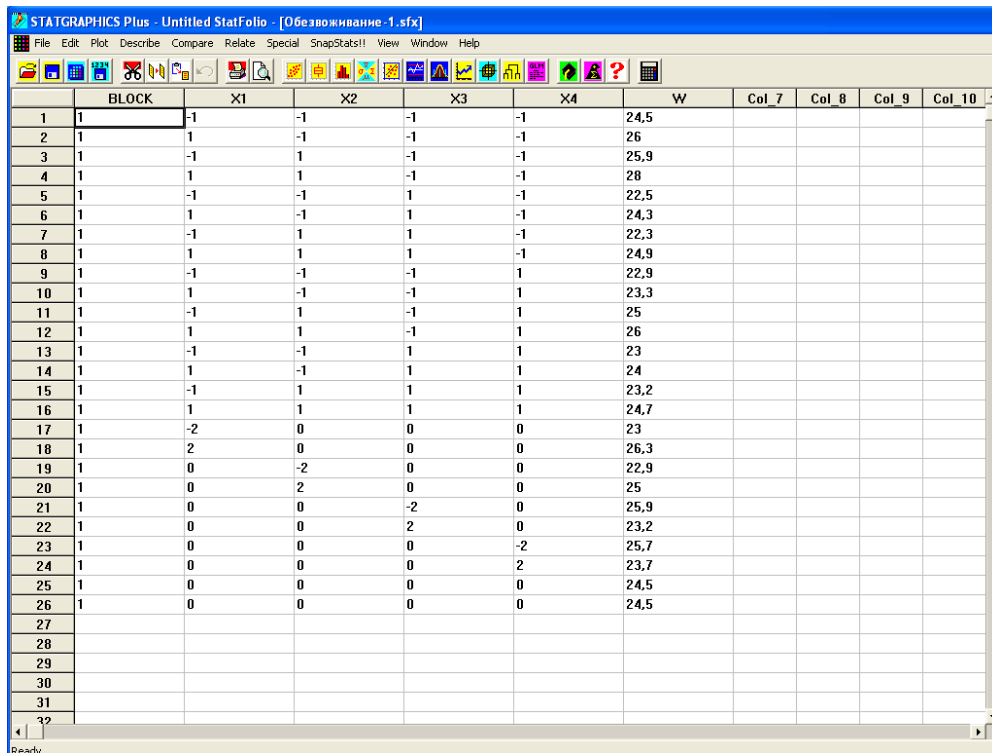


Рисунок 6.12 – Вікно діалогу друку.

Проведення експерименту

Надалі здійснювалася серія лабораторних експериментів зі значеннями досліджуваних параметрів відповідно до роздрукованої матриці планування. За вихідний матеріал було прийняте вугілля марки ДГ шахти Південно-Донбаська №1. Крупність вугілля становила 0-0,5 мм (флотаційна крупність). Вугілля змішувався з водою і в готову гідросуміш дозували реагент-модифікатор згідно матриці планування. В якості модифікатора використовували аніон активний реагент – лігносульфонат натрію (побічний продукт переробки деревини в целюлозу). Процес фільтрування здійснювався на лабораторній фільтрувальній установці. За результатами експериментів визначалася вологість осаду W , яка, як зазначалося вище, виступала в якості цільової функції (функції відгуку) в дослідженнях. Матриця планування і результати її реалізації представлені в таблиці 6.2.

Для введення значень цільової функції W у вихідну таблицю відкриємо файл "**Зневоднення-1.sfx**" (рис.6.13). У таблиці плану експерименту введемо в колонку W порядково відповідні значення цільової функції. Збережемо таблицю вибравши опції **File | Save | Save Design File**.



	BLOCK	X1	X2	X3	X4	W	Col_7	Col_8	Col_9	Col_10
1	1	-1	-1	-1	-1	24,5				
2	1	1	-1	-1	-1	26				
3	1	-1	1	-1	-1	25,9				
4	1	1	1	-1	-1	28				
5	1	-1	-1	1	-1	22,5				
6	1	1	-1	1	-1	24,3				
7	1	-1	1	1	-1	22,3				
8	1	1	1	1	-1	24,9				
9	1	-1	-1	-1	1	22,9				
10	1	1	-1	-1	1	23,3				
11	1	-1	1	-1	1	25				
12	1	1	1	-1	1	26				
13	1	-1	-1	1	1	23				
14	1	1	-1	1	1	24				
15	1	-1	1	1	1	23,2				
16	1	1	1	1	1	24,7				
17	1	-2	0	0	0	23				
18	1	2	0	0	0	26,3				
19	1	0	-2	0	0	22,9				
20	1	0	2	0	0	25				
21	1	0	0	-2	0	25,9				
22	1	0	0	2	0	23,2				
23	1	0	0	0	-2	25,7				
24	1	0	0	0	2	23,7				
25	1	0	0	0	0	24,5				
26	1	0	0	0	0	24,5				
27										
28										
29										
30										
31										
32										

Рисунок 6.13 – План-матриця експерименту з введеними в неї значеннями цільової функції W .

Таблиця 6.2 - Матриця планування та експериментальні дані.

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	W, %
-1	-1	-1	-1	24,5
1	-1	-1	-1	26
-1	1	-1	-1	25,9
1	1	-1	-1	28
-1	-1	1	-1	22,5
1	-1	1	-1	24,3
-1	1	1	-1	22,3
1	1	1	-1	24,9
-1	-1	-1	1	22,9
1	-1	-1	1	23,3
-1	1	-1	1	25
1	1	-1	1	26
-1	-1	1	1	23
1	-1	1	1	24
-1	1	1	1	23,2
1	1	1	1	24,7
-2	0	0	0	23
2	0	0	0	26,3
0	-2	0	0	22,9
0	2	0	0	25
0	0	-2	0	25,9
0	0	2	0	23,2
0	0	0	-2	25,7
0	0	0	2	23,7
0	0	0	0	24,5
0	0	0	0	24,5

Аналіз експериментальних даних

Вибираємо в меню **Special | Experimental Design | Analyze Design** - з'явиться відповідне вікно діалогу. Двічі клацнемо на **W** для введення імені цільової функції в поле даних і натиснемо кнопку **ОК**. Система відобразить первинну зведення проведеного аналізу (рис.6.14). Для детального аналізу отриманої регресійної моделі натиснемо кнопку табличних опцій (друга зліва у верхньому ряду жовтого кольору).

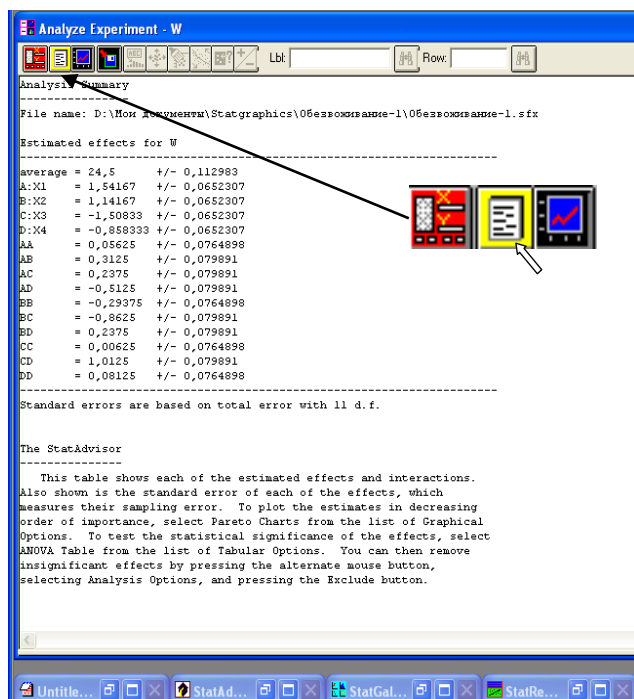


Рисунок 6.14- Первинне зведення аналізу.

На екрані з'явиться вікно діалогу. Виберемо опції **ANOVA Table** (таблиця дисперсійного аналізу), **Regression Coefficients** (коефіцієнти рівняння регресії) і **Predictions** (передбачення функції). Натиснемо кнопку **ОК**. В області аналізу з'явиться три додаткових вікна.

Двічі клацаємо лівою кнопкою миші у вікні дисперсійного аналізу для максимізації його розміру (рис.6.15).

Таблиця дисперсійного аналізу дозволяє оцінити статистичну значущість коефіцієнтів отриманої

регресійної моделі. Коефіцієнти моделі, для яких р-рівень (**p-value**) менше 0,05, вважаються статистично значущими при довірчій ймовірності 95%. Як видно з наведених на рис. 1.15 даних, статистично значущими є коефіцієнти при лінійних членах рівняння регресії, членах, які відповідають парній взаємодії і коефіцієнт при X_2^2 . При цьому коефіцієнти при X_1^2 , X_3^2 і X_4^2 є статистично незначущими і при розрахунках за отриманою моделі можуть не враховуватися.

Найбільш зручно і наочно значимість коефіцієнтів моделі можна перевірити за допомогою Парето-карти. Для цього клацнемо кнопку графічних опцій (див. рис.1.15) для виклику відповідного вікна діалогу. Встановимо прапорець **Pareto Chart** (Парето-карта) і натиснемо кнопку **ОК** (рис.6.16). Горизонтальні стовпці, що перетинають вертикальну лінію, що відповідає 95% довірчої ймовірності, свідчать про статистичну значущість відповідних коефіцієнтів моделі. Парето-карта наочно підтверджує статистичну незначущість коефіцієнтів при X_1^2 , X_3^2 і X_4^2 , встановлену вище за допомогою таблиці дисперсійного аналізу (рис.6.15).

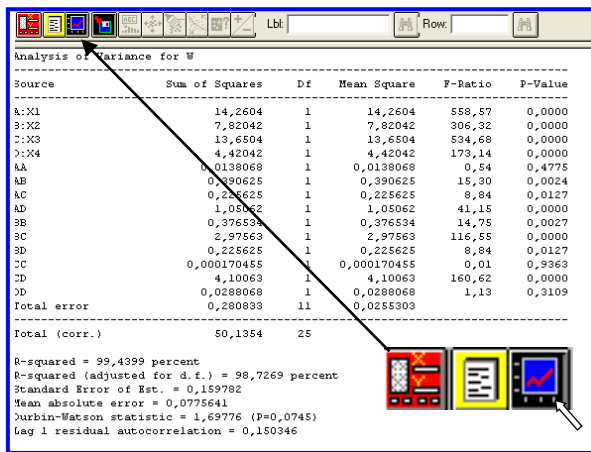


Рисунок 6.15 - Таблиця дисперсійного аналізу

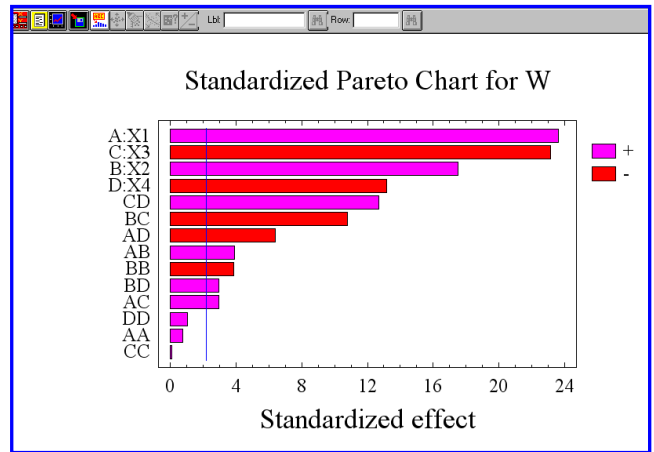


Рисунок 6.16-Парето-карта коефіцієнтів моделі

Парето-карта також дає уявлення про порівняльну значущість вхідних факторів для досліджуваного процесу. Збільшення довжини горизонтальних стовпців свідчить про збільшення впливу на процес відповідного фактора. Як видно з рис. 6.16, на процес вакуумного фільтрування вугільного флотоконцентрату найбільш істотно впливає чинник X1, тобто густина суспензії флотоконцентрату. Далі за значимістю фактори убувають в наступній послідовності: X3 (вакууметричний тиск) → X2 (зольність твердої фази) → X4 (витрати ПАР).

Колонки, колір яких відзначений знаком плюс, відповідають факторам і їх парним взаємодіям, які сприяють зростанню цільової функції (вологості осаду в нашому випадку). І, навпаки, колонки, колір яких відзначений знаком мінус, відповідають факторам і їх парним взаємодіям, які сприяють зменшенню значень цільової функції.

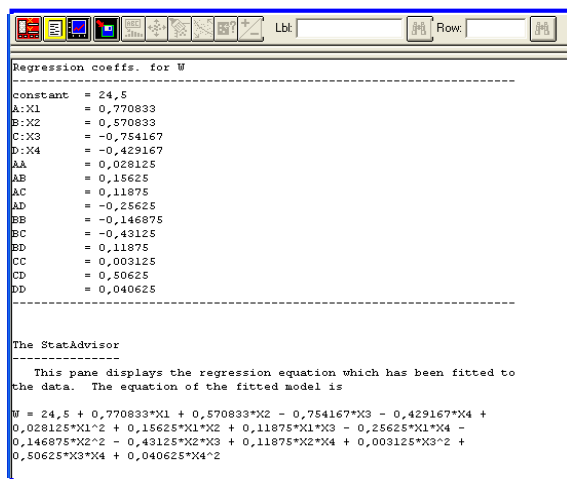


Рисунок 6.17 – Значення коефіцієнтів рівняння регресії.

Двічі клацнемо лівою кнопкою миші у вікні **Regression Coefficient** для максимізації його розміру (рис.6.17). У цьому вікні представлені значення коефіцієнтів рівняння регресії. У нижній частині цього ж вікна представлено саме рівняння регресії у вигляді полінома другого ступеня. Відповідно до даних, наведених на рис.6.17,

рівняння регресії з урахуванням значущості коефіцієнтів має вигляд:

$$W = 24,5 + 0,770833X_1 + 0,570833 \cdot X_2 - 0,754167 \cdot X_3 - 0,429167 \cdot X_4 + \\ + 0,15625 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,11875 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,25625 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0,146875 \cdot X_2^2 - \\ - 0,43125 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,11875 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0,50625 \cdot X_3 \cdot X_4 \quad (6.4)$$

Адекватність отриманої моделі досліджуваному процесу підтверджується високим значенням (близько 100%) коефіцієнта детермінації $R^2 = 99,44\%$, а також малим значенням стандартної помилки оцінки $SE = 0,1598$ (див. рис. 6.15).

Натиснемо на кнопки графічних опцій і у вікні **Graphical Options** (властивості графіка) виберемо опцію **Diagnostic Plots** (діагностичний графік). У новому графічному вікні, що з'явилося, двічі клацнемо лівою кнопкою миші для максимізації його розміру. У цьому ж вікні клацнемо правою кнопкою миші і в контекстному виберемо опцію **Pane Options**. У новому графічному вікні, що з'явилося **Diagnostic Plot Options** (властивості діагностичного графіка) відзначимо опцію **Observed vs Predicted** (відповідність між експериментальними і розрахунковими даними) і натиснемо кнопку **OK**. У вікні в графічній формі дано порівняння експериментальних (observed) та розрахункових (predicted) даних (рис.1.18).

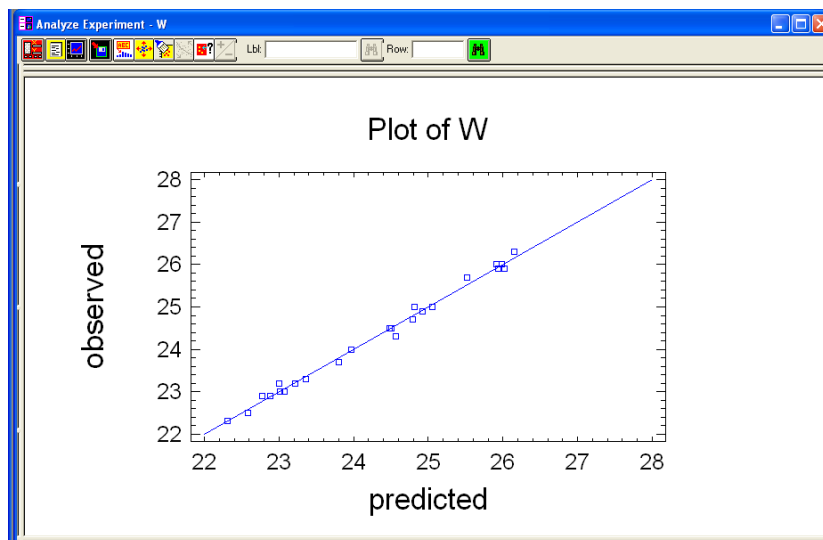
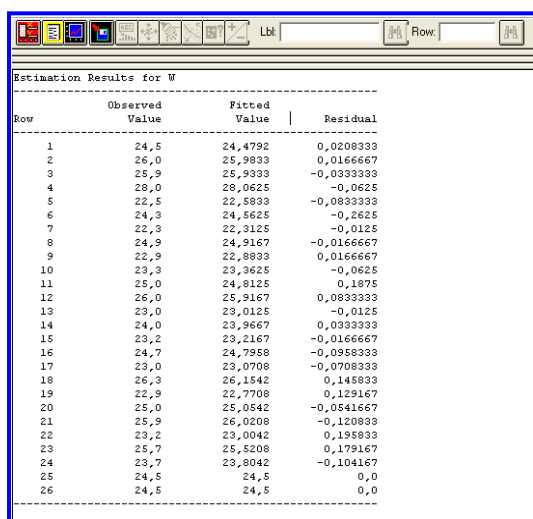


Рисунок 6.18 – Графік порівняння експериментальних (observed) і розрахункових (predicted) значень цільової функції.

Як видно, в більшості випадків різниця між цими даними невелика. Більшість експериментальних точок знаходиться поблизу прямої лінії.



Row	Observed Value	Fitted Value	Residual
1	24,5	24,4792	0,0208333
2	26,0	25,9833	0,0166667
3	25,9	25,9333	-0,0333333
4	28,0	28,0625	-0,0625
5	22,5	22,5833	-0,0833333
6	24,3	24,5625	-0,2625
7	22,3	22,3125	-0,0125
8	24,9	24,9167	-0,0166667
9	22,9	22,8833	0,0166667
10	23,9	23,3625	-0,0625
11	25,0	24,9125	0,0875
12	26,0	25,9167	0,0833333
13	23,0	23,0125	-0,0125
14	24,0	23,9667	0,0333333
15	23,2	23,2167	-0,0166667
16	24,7	24,7958	-0,0958333
17	23,0	23,0708	-0,0708333
18	26,9	26,1542	0,145833
19	22,9	22,7708	0,129167
20	25,0	25,0542	-0,0541667
21	25,9	26,0208	-0,120833
22	23,2	23,0042	0,195833
23	25,7	25,5208	0,179167
24	23,7	23,8042	-0,104167
25	24,5	24,5	0,0
26	24,5	24,5	0,0

Рисунок 6.19 – Таблиця порівняння експериментальних і розрахункових даних.

значеннями цільової функції. Малі абсолютні значення цих залишків є додатковим свідченням адекватності отриманої регресійної моделі досліджуваному процесу зневоднення флотоконцентрату вакуумним фільтруванням.

Повернемося в головне вікно двічі клацнувши лівою кнопкою миші. Натискаємо на кнопки графічних опцій і у вікні **Graphical Options** (властивості графіка) виберемо дві опції **Response Plots** (графіки функції відгуку) і натиснемо кнопку **ОК**. У правій колонці аналізу з'явиться два нові вікна. Двічі клацнемо лівою кнопкою миші у вікні **Estimated**

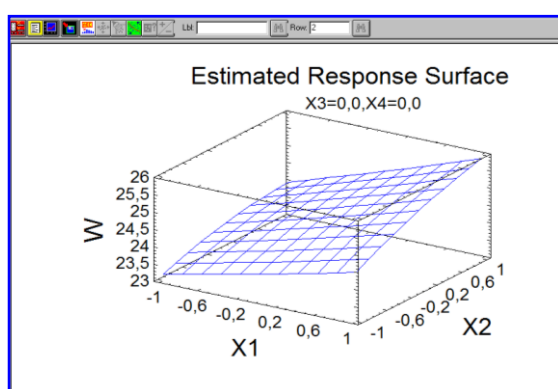


Рисунок 6.20 – Тримірний графік залежності $W = f(X_1, X_2)$.

Повернемося в головне вікно двічі клацнувши лівою кнопкою миші. У колонці табличних опцій двічі клацнемо лівою кнопкою миші у вікні **Estimation Results for W** (оцінка результатів для функції відгуку **W**) для максимізації його розміру (див. рис. 6.19). У цьому вікні наведені експериментальні (**observed**) і розрахункові (**fitted**) значення цільової функції **W** в точках план-матриці експерименту. У четвертій колонці таблиці наведені «залишки» (**residual**), як різниця між експериментальними і розрахунковими (передбаченими)

Response Surface (оцінка поверхні відгуку) для його максимізації (рис.6.20). У цьому вікні представлений тривимірний графік залежності цільової функції **W** від факторів X_1 і X_2 . При цьому, як видно, фактори X_3 і X_4 зафіксовані на нульовому рівні. Натиснемо в межах вікна правою кнопкою миші.

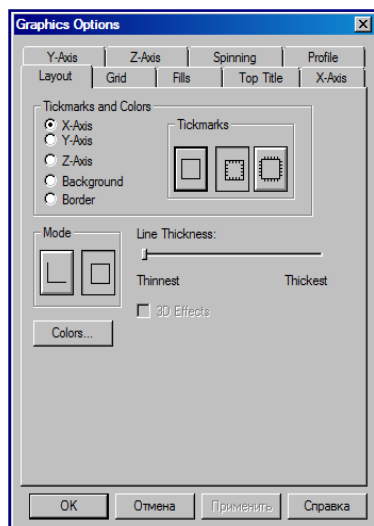


Рисунок 6.22 Вікно регулювання властивостей графіка.

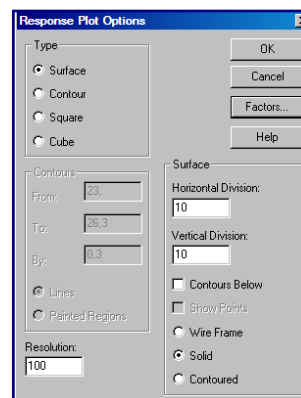


Рисунок 6.21- Контекстне меню **Response Plot Options**.

У контекстному меню виберемо опцію **Pane Options**. З'явиться вікно **Response Plot Options** (властивості графіка функції відгуку) (рис. 6.21). В області цього вікна **Type** (тип графіка) встановимо опцію **Surface** (поверхня). В області вікна **Surface** встановимо число поділок горизонтальної та вертикальної шкали графіка на рівні 10 а також виберемо опцію **Solid**. Для якісного відображення графіка поверхні відгуку опцію **Resolution** (доздільна здатність) встановимо не нижче 100. Для збереження введених установок натиснемо кнопку **OK**.

Повторно клацнемо в межах вікна правою кнопкою миші. У контекстному меню виберемо опцію **Graphics Options**. Закладки вікна **Graphics Options** (див. рис. 6.22) дозволяють відформатувати тривимірний графік – змінити характер забарвлення поверхні, змінити межі зміни значень вхідних параметрів, виконати розмітку осей і т.д. Для зміни положення графіку в тривимірному просторі натисніть зелену кнопку в рядку меню графічного вікна (див. рис.6.23).

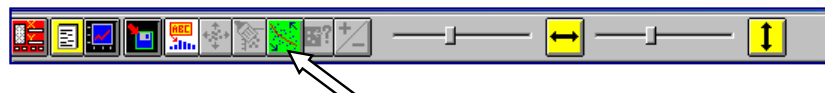


Рисунок 6.23 – Регулювання положення графіка у тривимірному просторі.

При цьому стають доступними жовті кнопки і повзуни зміни положення графіка в горизонтальній і вертикальній площині. Натискання кнопок

призводить до безперервного обертання графіка навколо відповідної осі. Повторне натискання кнопки призводить до зупинки обертання. Повзуни призначені для дискретної зміни положення графіка.

На рис. 6.24 показаний можливий варіант форматування тривимірного графіка поверхні відгуку. Для вибору іншої пари входних параметрів знов клацніть в графічному вікні правою кнопкою миші, виберіть у контекстному меню опцію **Pane Options** і у вікні **Response Plot Options** (див. рис.6.21) виберіть опцію **Factors** (фактори). З'явиться діалогове вікно **Response Plot Factors** (фактори функції відгуку) (див. рис.6.25). Тут можна вибрати будь-яку пару входних параметрів, задати інтервали їх варіювання, а також фіксовані значення інших факторів.

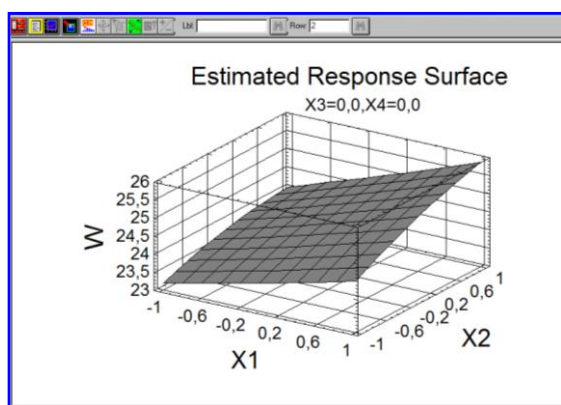


Рисунок 6.24 – Варіант форматування графіка поверхні відгуку.

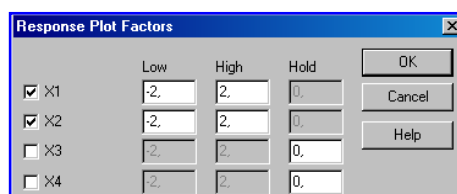
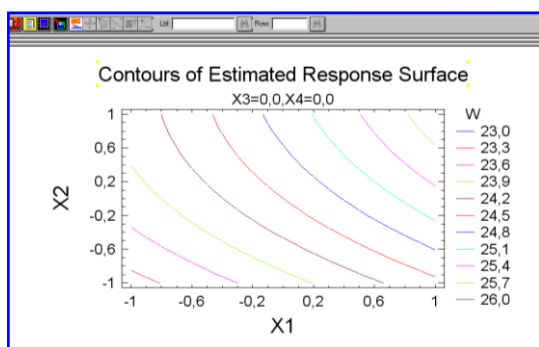
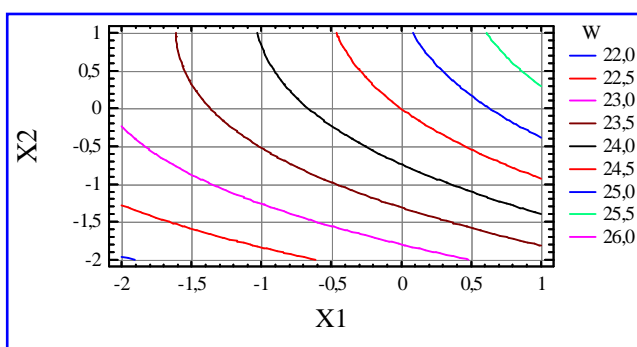


Рисунок 6.25 – Діалогове вікно **Response Plot Factors**.



а



б

Рисунок 6.26 – Контурний графік поверхні відгуку:
а- первинний; б - відформатований

У головному меню аналізу **Analyze Experiment** двічі клацаємо у вікні **Contours of Estimated Response Surface** (оцінка контурного графіка функції відгуку) для максимізації його розміру (рис.6.26, а). Показаний контурний графік являє собою контури проєкцій рівних значень функції відгуку на площину. Форматування контурного графіка здійснюється так само як і графіка поверхні відгуку. На рис.6.26, б наведено приклад відформатованого контурного графіка.

Будь-який з графіків програми **STATGRAPHICS** може бути скопійований в буфер обміну **Windows** і вставлений, наприклад, в документ **Microsoft Word**. Крім того, графіки можуть бути збережені в більшості відомих форматів - **wmf (windows metafiles); jpg (JPEG 24 bit color); tif (TIF color)** і ін. Копіювання в буфер обміну або збереження у вигляді графічного файлу здійснюється за допомогою контекстного меню, що викликається при клацанні правою кнопкою миші у вікні графіка.

На рис.6.27 показано узагальнене вікно графічного аналізу отриманого рівняння регресії, скомпоноване в текстовому редакторі **Microsoft Word**.

Проаналізуємо отримані результати. Як видно з тривимірних перетинів гіперповерхні $W(X_i)$ і контурних кривих цих поверхонь, вологість зневодненого вугілля зростає в міру збільшення густини гідросуміші (X_1) і зростання зольності твердої фази (X_2). У той же час зростання вакуумметричного тиску (X_3) призводить до зниження вологості вугілля. Це відповідає класичним уявленням про вплив зазначених факторів на ефективність зневоднення фільтруванням. Що стосується впливу реагенту-модифікатора (X_4), то зі збільшенням його витрати вологість осаду помітно зменшується. При цьому найбільш позитивний вплив реагенту спостерігається при невеликих значеннях вакуумметричного тиску. Зі збільшенням останнього вплив реагентів на вологість вугільного осаду нівелюється.

Отже, механічні фактори в процесі зневоднення є домінуючими. Реагентні методи інтенсифікації зневоднення фільтруванням можуть бути рекомендовані при недостатніх рівнях вакуумметричного тиску.

Розрахунок по рівнянню 6.4 показує, що при збільшенні витрати реагенту від 0 до 200 г / т можливе зменшення вологості вугільного осаду на 1,8-2,0%.

Для збереження результатів досліджень у вигляді файлу проекту виберемо пункти меню **File | Save As | Save Statfolio As**. У вікні (рис.6.28)

задамося ім'ям файлу проекту (наприклад, **зневоднення-1.sgp**) і збережемо його в тій же папці, що й файл вихідних даних **зневоднення-1.sfx**.

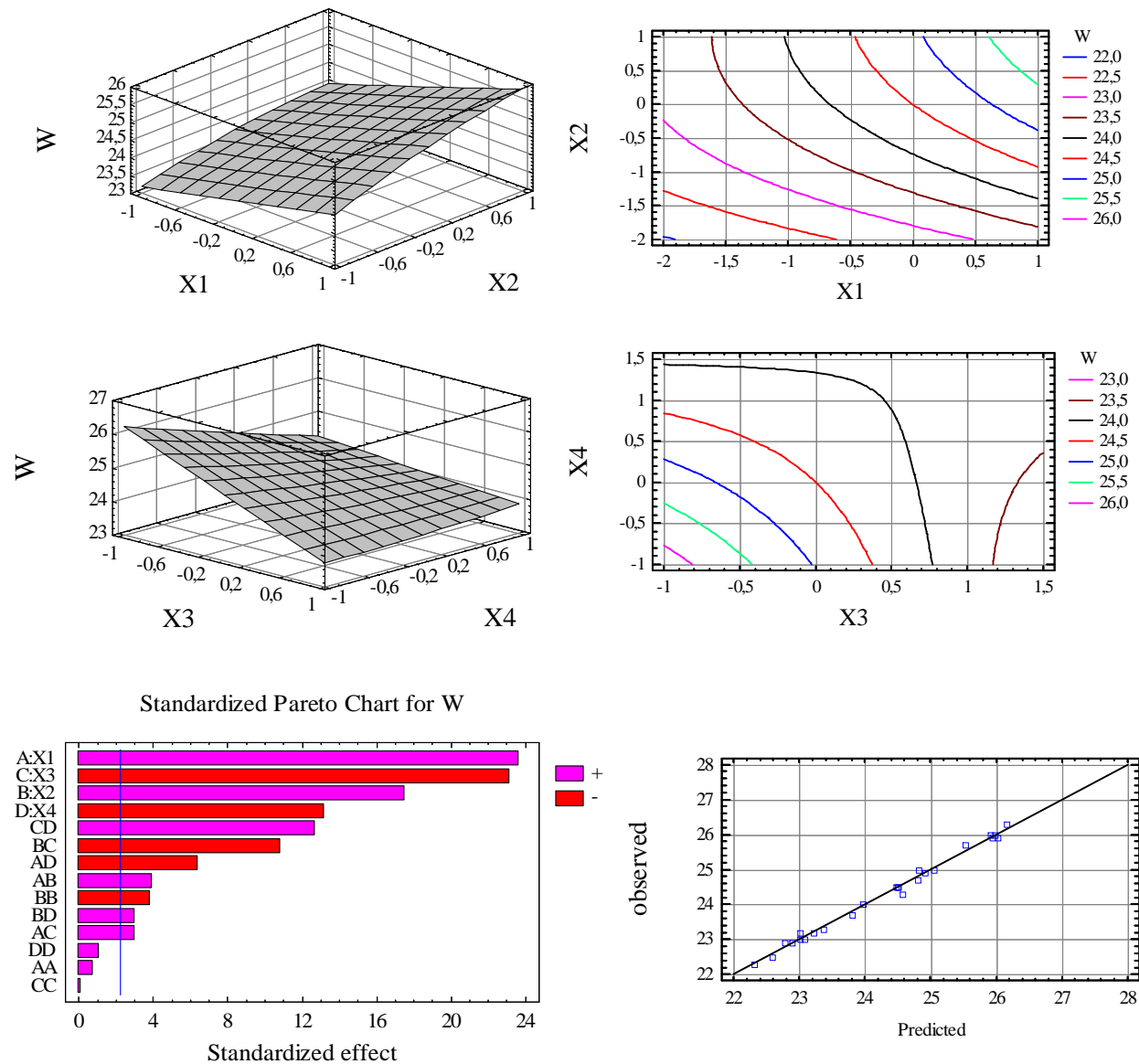


Рисунок 6.27. Узагальнене вікно графічного аналізу отриманого рівняння регресії

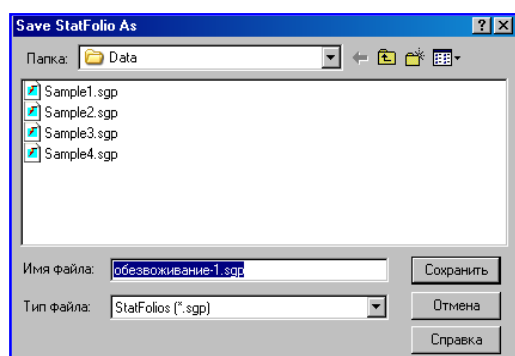


Рисунок 1.28 - Збереження результатів досліджень.

6.1.2 Планування експерименту при математичному описі діаграм «склад-властивість»

6.1.2.1 Принцип методу симплекс-гратчастого (центроїдного) планування

У практиці переробки корисних копалин часто доводиться вирішувати завдання оптимізації складу багатокомпонентної суміші – наприклад, визначення оптимального гранулометричного складу вихідної сировини збагачувальних апаратів, складу композиційних реагентів і т.п. Звичайні, розглянуті вище, методи активного планування експерименту в даному випадку застосувати не можна, так як на незалежні змінні накладено обмеження:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1; x_i \geq 0, \quad (1.5)$$

де x_i – вміст i -того компонента в суміші, що з n компонентів, частки одиниці, тобто вміст усіх компонентів у будь-якої суміші завжди дорівнює одиниці або 100%.

У цих випадках застосуємо метод активного планування експерименту для дослідження систем склад-властивість. Так як сума часток всіх компонентів, що складають суміш, дорівнює одиниці, то факторний простір може бути представлено правильним симплексом, для трьох компонентів правильним трикутником, для чотирьох - правильним тетраедром і т.д. Властивості складу досліджуються в наперед заданих точках симплекса, які утворюють так звану *симплексну решітку*.

У разі трикомпонентної суміші кожній точці трикутної діаграми відповідає один, цілком певний склад, а кожному складу відповідає одна

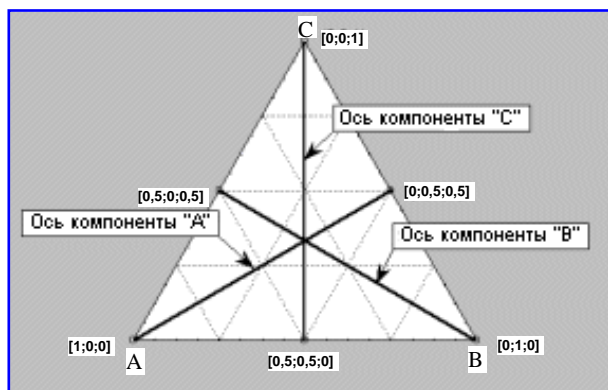


Рисунок 6.29 – Трикутна діаграма трикомпонентної суміші.

точка на діаграмі. У кожній вершині трикутної діаграми вміст одного компонента становить 100%. На протилежній цій вершині стороні вміст цього компонента дорівнює нулю. Сторони трикутника відповідають бінарним сумішам (див. рис.6.29).

Розглянемо побудову концентраційного трикутника Гіббса, використовуваного при

розробці та аналізі плану експерименту. З кожної вершини правильного трикутного симплекса проведемо висоту, розділимо кожен з них, наприклад, на десять частин і, провівши через отримані ділення прямі, паралельні відповідним сторонам трикутника, отримаємо трикутну сітку (див. рис. 6.30). Відлік ведемо від точок перетину висот і сторін

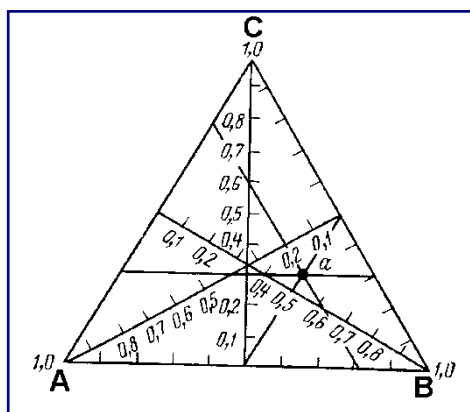


Рисунок 6.30 –
Концентраційний
трикутник Гіббса

трикутника. Кожна точка, що лежить в межах трикутного симплекса характеризується трьома координатами (вмістом компонентів A, B і C). Наприклад, точці a на рис. 6.30 відповідає такий вміст компонентів: $A = 0,2$; $B = 0,5$; $C = 0,3$.

Як правило, поверхні відгуку в багатокомпонентних системах мають вельми складний характер. Для адекватного опису таких поверхонь використовують поліноми високих ступенів. У разі трикомпонентних систем найбільш часто застосовуються плани

другого і третього порядку, з розробкою квадратних і кубічних моделей відповідно. Розташування дослідів на симплексі для цих моделей представлено на рис. 6.31.

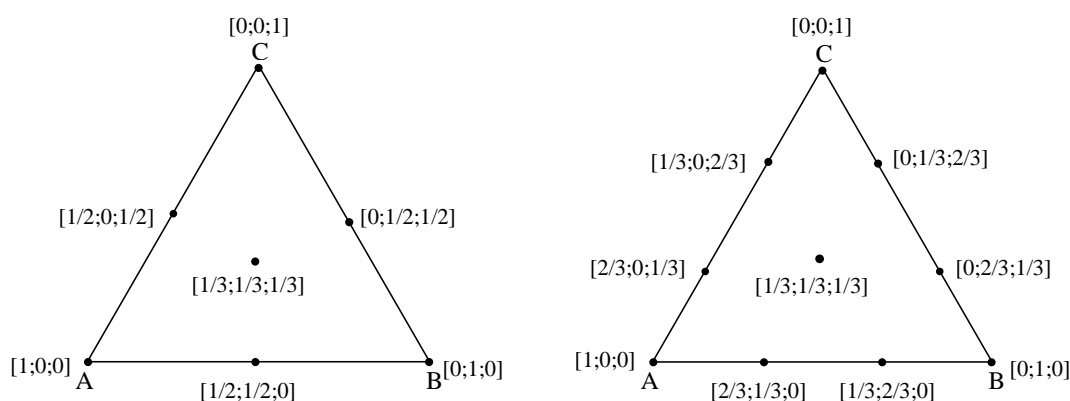


Рисунок 6.31. – Розташування дослідів на симплексі при
розробці квадратних і кубічних моделей.

Розглянемо особливості симплекс-гратчастого планування для випадку визначення оптимального складу шихти при брикетуванні молодого бурого вугілля без зв'язуючих.

Ефективність брикетування бурого вугілля на штемпельних пресах багато в чому визначається ситовим складом вихідного вугілля. Теоретичний принцип підбору суміші частинок різної крупності полягає у створенні композиції, що володіє найбільш щільною упаковкою зерен. Такі композиції забезпечують максимальну міцність буровугільних брикетів.

Визначимо оптимальний ситовий складу бурого вугілля Олександрійського родовища крупністю 0-4 мм. Вихідна шихта формувалася з трьох вузьких класів: 0-1 мм; 1-2 мм і 2-4 мм. При цьому вологість шихти знаходилася в межах 15-16%.

Подібні дослідження найбільш доцільно проводити методами симплекс-гатчастого або симплекс-центроїдного планування для систем "склад-властивість". У даних дослідженнях був використаний симплексцентроїдний план Шеффе, що забезпечує рівномірний розкид експериментальних точок в факторному просторі. В якості цільової функції використовували показник механічної міцності буровугільних брикетів на стиск P (МПа). Брикетування проводили на гідравлічному пресі ІП-1 при тиску пресування 100 МПа.

6.1.2.2 Розробка і збереження плану експерименту

Двічі клацаємо на ярлику програми **STATGRAPHICS** на робочому столі комп'ютера для ініціалізації системи. У рядку меню програми виберемо **Special | Experimental Design | Create Design** – система видасть вікно діалогу для розробки експериментального плану. Встановимо

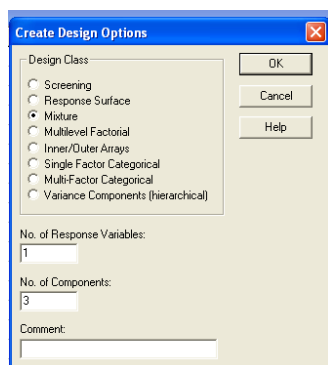


Рисунок 6.32. – Вікно діалогу для розробки експериментального плану.

перемикач типу експериментального плану в положення **Mixture** (суміш). Задамо число функцій відгуку 1 і кількість компонентів (в даному випадку класів крупності) 3. Поле коментарів (**comment**) залишимо порожнім. Заповнене вікно діалогу показане на рис. 6.32.

Натиснемо кнопку **ОК**. На екрані з'явиться вікно діалогу для опису компонентів шихти. Тут задаються імена компонентів, верхні і нижні межі їх значень і одиниці виміру (див. рис. 6.33.). Заповнимо вікно діалогу. Позначимо клас крупності вихідного бурого вугілля 0-1 мм як **X1** і задамо його нижню та верхню межі варіювання

0 і 1. Клас крупності бурого вугілля 1-2 мм позначимо як **X2** і задамо його межі варіювання (пайова участь в шихті) від 0 до 1 . Аналогічним чином зробимо з класом крупності 2-4 мм. У всіх випадках в поле **Mixture Total** (сумарна суміш) встановлюємо 1. Поле **Units** (розмірність) залишимо порожнім.

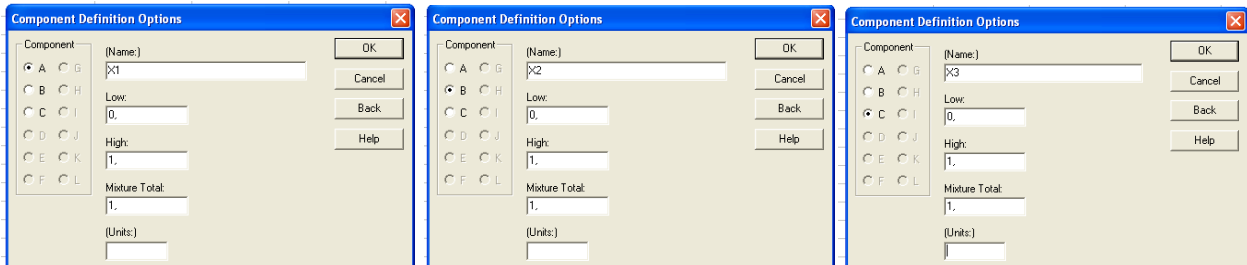


Рисунок 6.33- Вікна діалогів для опису компонентів вугільної шихти.

Натискаємо кнопку **ОК**. Система видає вікно діалогу для завдання параметрів функції відгуку. Позначимо функцію відгуку (механічну міцність брикетів) як **P**, а також вкажемо її розмірність в поле **Units** - **МПа** (див. рис.6.34.).

Натиснемо кнопку **ОК**. На екрані з'явиться наступне вікно діалогу для вибору типу плану (див. рис. 6.35).

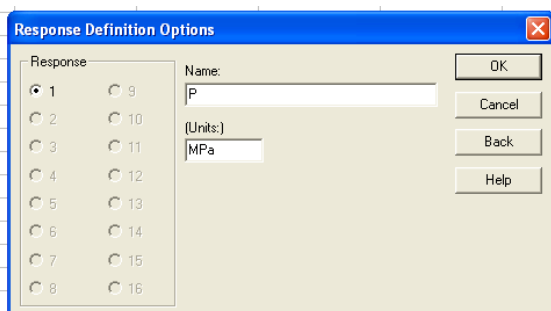


Рисунок 6.34. – Вікно діалогу для опису функції відгуку.

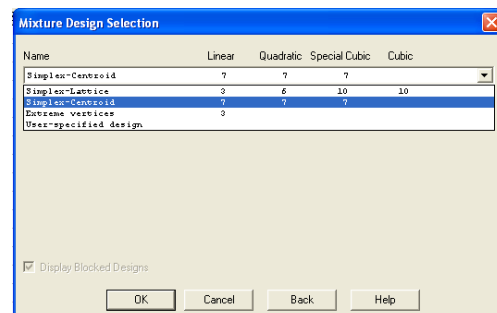


Рисунок 6.35. - Вікно діалогу для вибору типу експериментального плану.

За допомогою кнопки зі стрілкою вниз розкриємо список доступних планів. Виберемо **Simplex-Centroid** (симплекс-центроїдний план), потім натиснемо кнопку **ОК**. На екрані з'явиться вікно діалогу для завдання параметрів обраного експериментального плану. Заповнимо вікно діалогу. У полі завдання типу моделі виберемо **Special Cubic** (спеціальна кубічна).

Спеціальна кубічна модель в нашому випадку являє собою квадратичну модель плюс зважений добуток трьох компонентів суміші. Перемикач поставимо в положення **Augment Design** (розширений план) і знімемо прапорець **Randomize** (рандомізація). Заповнене вікно діалогу наведено на рис. 6.36.

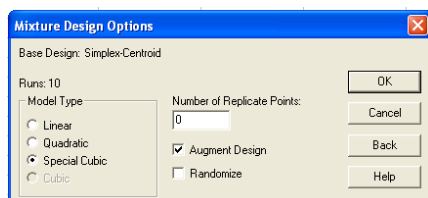


Рисунок 6.36. – Вікно діалогу для завдання параметрів плану.

Натискаємо кнопку **ОК**. Система видасть зведення обраного типу експериментального плану (див. рис. 6.37). Дане зведення включає в себе тип плану, видається загальна інформація про компоненти шихти, функції відгуку і експерименти. Після перегляду цього матеріалу його необхідно зберегти. Виберемо з меню **File | Save Design File As**. З'явиться відповідне вікно діалогу (рис. 6.38.). Назвемо наш план **briket.sfx** і натиснемо кнопку **ОК**. Тепер все приготовлено для проведення розробленого плану в життя, збирання й введення експериментальних даних для подальшої обробки.

Відкриємо файл **briket.sfx**. Перед нами з'явиться вікно з матрицею планування (рис. 6.39.).

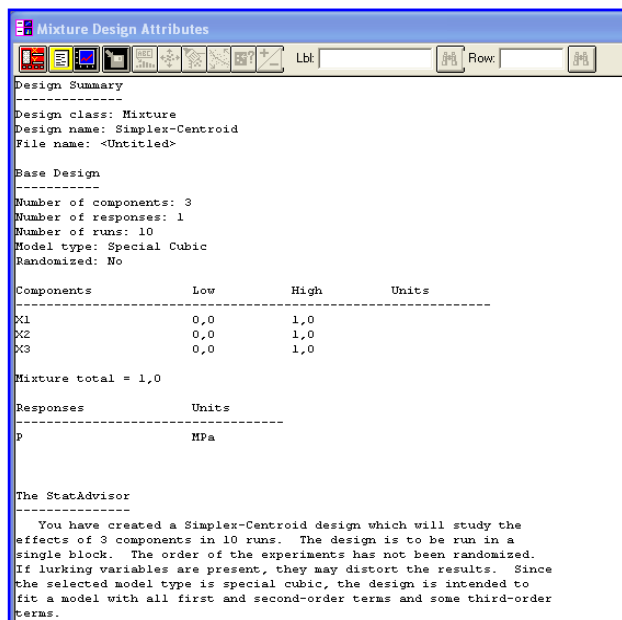


Рисунок 6.37 – Зведення плану експерименту

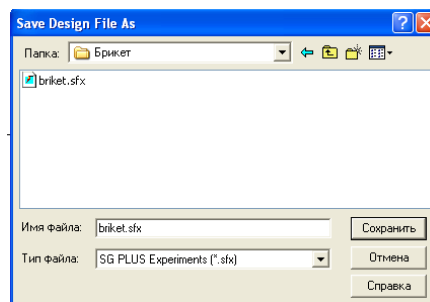


Рисунок 6.38 – Збереження плану експерименту

	BLOCK	X1	X2	X3	P	Col_6
1	1	1	0	0		
2	1	0	1	0		
3	1	0	0	1		
4	1	0,5	0,5	0		
5	1	0,5	0	0,5		
6	1	0	0,5	0,5		
7	1	0,333333	0,333333	0,333333		
8	1	0,666667	0,166667	0,166667		
9	1	0,166667	0,666667	0,166667		
10	1	0,166667	0,166667	0,666667		
11						

Рисунок 6.39 – Матриця планування експерименту

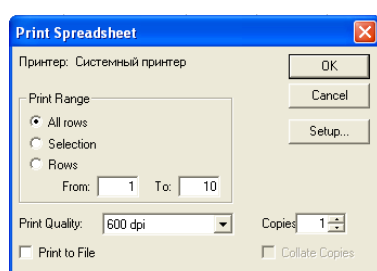


Рисунок 6.40 – Вікно діалогу друку

Роздрукуємо план-матрицю експерименту. Для цього виберемо з меню **File | Print** - система надасть вікно діалогу для роздрукування план-матриці проведеного аналізу (рис. 6.40). Встановимо перемикач в положення **All Rows** (усі рядки таблиці) і натиснемо кнопку **OK**. Система роздрукує робочу таблицю для збору даних.

Після реалізації матриці експерименту шляхом проведення лабораторних досліджень та отримання значень цільової функції в кожному з дослідів отримана таблиця 6.3.

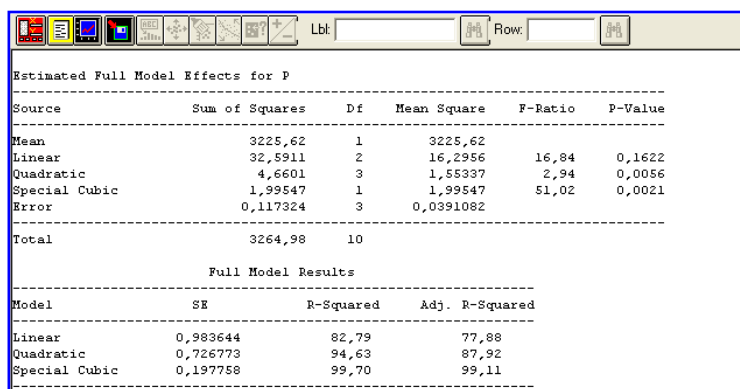
Таблиця 6.3– Матриця планування і результати експериментів

№ дослідів	Компоненти (класи крупності)			Міцність брикетів Р, МПа
	X ₁ (0-1 мм)	X ₂ (1-2 мм)	X ₃ (2-4 мм)	
1	1	0	0	19,1
2	0	1	0	18,8
3	0	0	1	14,0
4	0,5	0,5	0	20,5
5	0,5	0	0,5	16,7
6	0	0,5	0,5	15,6
7	0,3333	0,3333	0,3333	19,3
8	0,6666	0,1666	0,1666	19,8
9	0,1666	0,6666	0,1666	19,1
10	0,1666	0,1666	0,6666	16,7

У вікні файлу **briket.sfx** двічі клацнувши мишею на заголовку вікна відкриємо електронну таблицю. Внесемо в неї дані для 10 значень функції відгуку, отриманих експериментальним шляхом. Виконаємо команду **File | Save Design File**. Система збереже введені дані.

6.1.2.3 Аналіз експериментальних даних


Виберемо з меню **Special | Experimental Design | Analyze Design**. На екрані з'явиться вікно діалогу для введення аналізованих змінних. Двічі клацнемо лівою кнопкою миші на змінній P і натиснемо кнопку **OK**. Система видасть зведення проведеного аналізу (рис. 6.41.). У зведенні наведено стандартні статистичні характеристики для кожного типу поліноміальної моделі. З отриманих цифр випливає, що статистично значущі ефекти спостерігаються у спеціальній кубічній моделі (р-значення менше 0,05). Так як у спеціальній кубічній моделі значення **SE** (квадратні корені з середніх квадратів помилок) менше, а значення коефіцієнтів детермінації R-квадратів більше, ніж у інших моделей, подальший аналіз буде орієнтований на спеціальну кубічну модель.



Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Mean	3225,62	1	3225,62		
Linear	32,5911	2	16,2956	16,84	0,1622
Quadratic	4,6601	3	1,55337	2,94	0,0056
Special Cubic	1,99547	1	1,99547	51,02	0,0021
Error	0,117324	3	0,0391082		
Total	3264,98	10			

Model	SE	R-Squared	Adj. R-Squared
Linear	0,983644	82,79	77,88
Quadratic	0,726773	94,63	87,92
Special Cubic	0,197758	99,70	99,11

Рисунок 6.41 – Зведення результатів аналізу експериментальних даних

Натиснемо кнопку табличних опцій  (друга зліва у верхньому ряду). На екрані з'явиться відповідне вікно діалогу. Встановимо прапорець **Model Results** (результати моделі) і натиснемо кнопку **OK**. Система відобразить в другому табличному вікні статистики, розраховані для спеціальної кубічної моделі. Двічі клацнемо на цьому другому вікні для максимального збільшення його розмірів (див. рис. 6.42.). Як випливає з отриманих цифр, всі члени спеціальної кубічної моделі мають значимі

ефекти ($p < 0,05$), крім одного коефіцієнта AC (X_1X_3). З урахуванням значущості коефіцієнтів рівняння регресії має наступний вигляд:

$$P = 19,1118 \cdot X_1 + 18,7481 \cdot X_2 + 14,0754 \cdot X_3 + 6,11977 \cdot X_1 \cdot X_2 - 3,15295 \cdot X_2 \cdot X_3 + 45,3178 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Випробуємо спеціальну кубічну модель в цілому за допомогою дисперсійного аналізу. Для цього викличемо ще раз вікно діалогу табличних опцій. Встановимо прапорець **ANOVA Table** (таблиця дисперсійного аналізу). Система додасть на екран вікно з вказаною таблицею. Двічі клацнувши на ньому лівою кнопкою миші, збільшимо розміри таблиці (див. рис. 6.43.). Високий рівень значущості ($p < 0,05$), велике (більше 99%) значення коефіцієнта детермінації R-квадрат і мале значення стандартної помилки оцінки **SE** ($SE = 0,1977$) свідчать про адекватність отриманої моделі досліджуваному процесу.

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
A:X1	19,1118	0,191161		
B:X2	18,7481	0,191161		
C:X3	14,0754	0,191161		
AB	6,11977	0,962264	6,35977	0,0079
AC	0,77432	0,962264	0,804686	0,4799
BC	-3,15295	0,962264	-3,2766	0,0465
ABC	45,3178	6,3439	7,14351	0,0056

R-squared = 99,702 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 99,1059 percent
Standard Error of Est. = 0,197748
Mean absolute error = 0,0848076
Durbin-Watson statistic = 2,33544
Lag 1 residual autocorrelation = -0,459716

The StatAdvisor
This pane displays the equation of the fitted special cubic model.
The equation of the fitted model is
 $P = 19,1118 \cdot X_1 + 18,7481 \cdot X_2 + 14,0754 \cdot X_3 + 6,11977 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,77432 \cdot X_1 \cdot X_3 - 3,15295 \cdot X_2 \cdot X_3 + 45,3178 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$

where the values of the components are specified in pseudo-components.
To have STATGRAPHICS evaluate this function, select Predictions from the list of Tabular Options. To plot the function, select Response Plots from the list of Graphical Options.

Рисунок 6.42 – Результати розрахунків спеціальної кубічної моделі.

Source	Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Special Cubic Model	39,2467	6	6,54111	167,27	0,0007
Total error	0,117312	3	0,0391041		
Total (corr.)	39,364	9			

R-squared = 99,702 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 99,1059 percent
Standard Error of Est. = 0,197748
Mean absolute error = 0,0848076
Durbin-Watson statistic = 2,33544
Lag 1 residual autocorrelation = -0,459716

The StatAdvisor
This table shows an analysis of variance for the currently selected special cubic model. Since the P-value for this model is less than 0.01, there is a statistically significant relationship between P and the components at the 99% confidence level.

Рисунок 6.43 – Таблиця дисперсійного аналізу.

Знову звернімося до меню табличних опцій. У новому діалоговому вікні встановимо прапорець **Optimization** (оптимізація) і натиснемо кнопку **OK**. У лівій колонці статистичних таблиць з'явиться нове вікно **Optimize Response**, в якому система видає оптимальний склад вихідних компонентів, що забезпечує максимальне або мінімальне значення цільової функції (див. рис. 6.44.). Щоб вказати системі, про який екстремум цільової функції йде мова, клацнемо правою кнопкою миші в полі таблиці і в контекстному меню виберемо опцію **Pane options**. У діалоговому вікні

яке з'явився при цьому встановимо в поле **Type of Optimization** (тип оптимізації) прапорець **Maximize** (максимальний) - див. рис. 6.45. Зазначений вибір обумовлений тим, що в наших дослідженнях ставиться завдання створення композиції (шихти) трьох класів крупності вихідного бурого вугілля, що забезпечує максимальну міцність брикетів. Тому перед системою ставиться завдання знаходження екстремуму-максимуму цільової функції (міцності брикетів P).

Як видно з даних, наведених на рис. 6.44., максимальна міцність

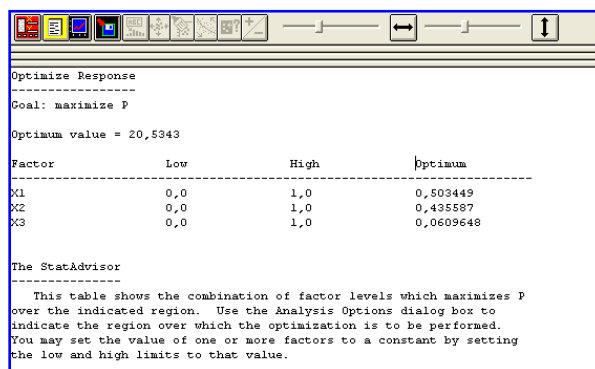


Рисунок 6.44 - Оптимізація цільової функції

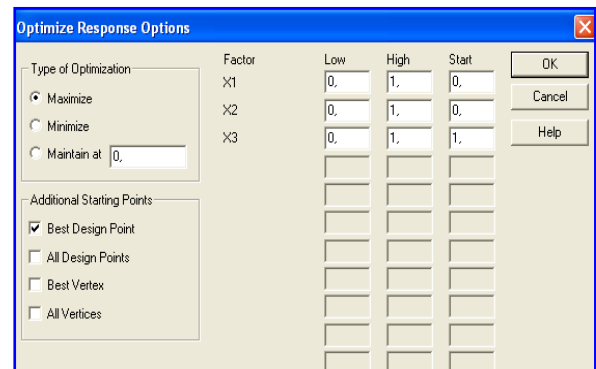


Рисунок 6.45 – Вибір типу оптимізації цільової функції

брикетів ($P = 20,5$ МПа) досягається при наступному співвідношенні класів крупності: X1 (0- 1мм) - 50%; X2 (1 2 мм) - 44%; X3 (2-4 мм) - 6%.

Щоб проілюструвати отримані результати, звернемося до графічних відображень. Натиснемо кнопку графічних опцій (іконка графіка в рядку зліва у верхньому ряду). Система видасть вікно діалогу для їх завдання. Виберемо два графіки функції відгуку **Response** і натиснемо кнопку **OK**. Праву частину екрану займуть **Estimated Response Surface** (графік поверхні функції відгуку) і її контурний графік **Contours of Estimated Response Surface**.

Двічі клацаємо лівою кнопкою миші для максимізації розмірів верхнього графічного вікна Estimated Response Surface (див. рис. 6.46.). На графіку чітко простежується екстремальний характер залежності міцності буровугільних брикетів від складу трикомпонентної шихти.

При цьому зростання вмісту в шихті класів 0-1 мм (компонент X1) і 1-2 мм (фактор X2) однозначно супроводжується збільшенням міцності брикетів. При цьому найбільш ефективними є не моно-, а полідисперсні композиції, що складаються з двох і більше класів крупності. У теж час,

істотне зростання вмісту класу 2-4 мм небажане, оскільки призводить до різкого зниження міцності брикетів.

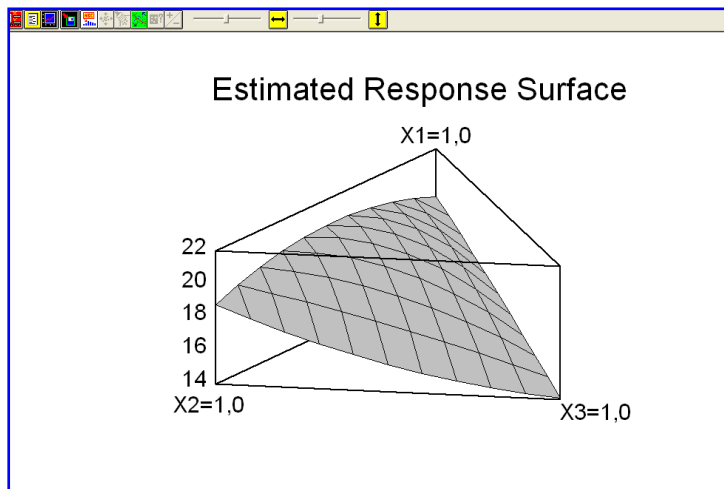


Рисунок 6.46 – Графік поверхні функції відгуку

Зростання вмісту в шихті крупнішого класу (2-4 мм) супроводжується меншою щільністю упаковки вугільних зерен в структурі брикету, збільшенням їх пористості і, як наслідок, зниженням міцності брикетів. Крім того, більш великі вугільні частинки схильні в процесі пресування до розтріскування внаслідок відносно низької міцності. В результаті частина енергії пресування витрачається не на корисні пластичні деформації, а на крихке руйнування великих часток.

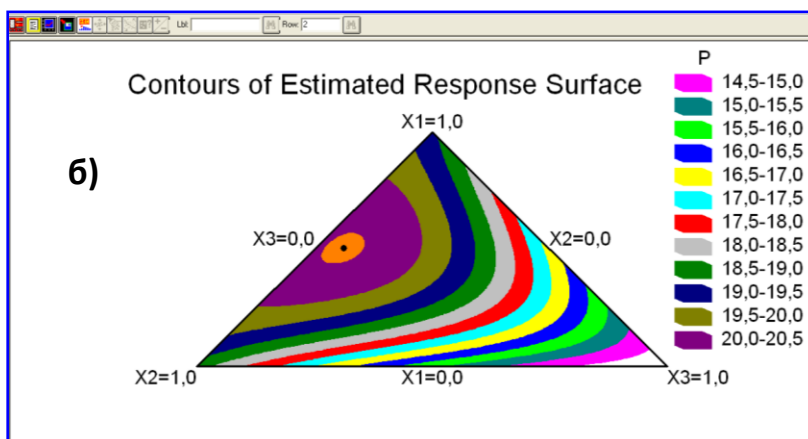
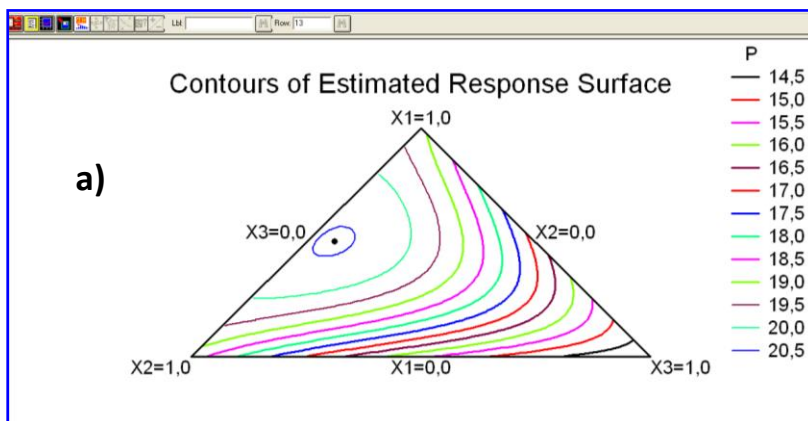


Рисунок 6.47 – Контурні графіки поверхні відгуку

Натиснемо двічі лівою кнопкою миші на нижньому графіку **Contours of Estimated Response Surface**. На рисунку 6.47 представлений первісний контурний графік поверхні відгуку у вигляді контурних ліній рівних значень проєкцій цільової функції P на трикомпонентний

симплекс. У цьому ж вікні клацнемо правою кнопкою миші і в контекстному меню виберемо опцію **Painted Regions** (пофарбовані області). У результаті графік зміниться і буде являти собою сукупність забарвлених зон, які відповідають певному інтервалу зміни цільової функції (див. рис. 6.47 б).

Чорною крапкою на обох контурних графіках позначено оптимальне співвідношення класів крупності, що забезпечує максимальну міцність буровугільних брикетів. Це співвідношення приведено нами на рис. 6.44.

Таким чином, проведені дослідження показують, що максимальна міцність буровугільних брикетів досягається при пресуванні полідисперсного вугілля. Однорідний (монодисперсний) склад вихідної шихти не дозволяє забезпечити високу щільність упаковки зерен в структурі брикету. Зерна укладаються зі значним числом пустот в каркасі. Тиск пресування нерівномірно розподіляється в об'ємі матеріалу, брикети легко деформуються.

У разі брикетування вугілля крупністю 0-4 мм, оптимальний ситовий склад вихідної шихти відповідає наступному співвідношенню класів: 0-1 мм - 50%; 1-2 мм - 44%; 2-4 мм - 6%.

Для збереження результатів досліджень у вигляді файлу проекту виберемо пункти меню **File | Save As | Save Statfolio As**. У вікні задамося ім'ям файлу проекту (наприклад, **briket.sqp**) і збережемо його в тій же папці, що й файл вихідних даних **briket.sfx**

6.2 Приклади моделювання технологічних процесів переробки корисних копалин

6.2.1 Процес адгезійного контакту «вуглемасляна речовина – золото»

Рядом наукових центрів в США, Австралії, Великобританії, Росії активно розробляється новий напрямок збагачення тонкодисперсного золота та інших гідрофобних пиловидних корисних копалин шляхом селективної адгезії олеофільних частинок руди на спеціальних адгезійно активних гранульованих носіях. Область застосування цього процесу широка - вона включає рудну сировину крупністю від 10 мкм до 0,5 мм, яка характерна для ряду золотоносних родовищ України. Процес адгезійного збагачення в порівнянні з сучасними технологіями-аналогами

вигідно відрізняється високою ефективністю та більшою екологічною чистотою [33, 34].

Елементарним актом процесу адгезійного збагачення тонкодисперсного золота при використанні в якості носіїв вуглемасляних гранул є контакт “вуглемасляна речовина – золото”. Попри лабораторні та стендові дослідження процесу в цілому і його промислові апробації, дослідження власне елементарного акту адгезійного контакту “адгезив-субстрат” не були проведені, що звужує можливості цілеспрямованої корекції вибору реагентів-зв’язуючих, температурного режиму процесу адгезійного збагачення та оптимізації характеристик гранул-носіїв.

Нами вперше в рамках НДР “Розробка наукових основ процесу адгезійного збагачення тонкодисперсного золота” (2000 р., ДР 0199U001117) досліджено процес адгезійного контакту “вуглемасляна речовина – золото” із застосуванням планування експерименту. Об’єктом досліджень була грануляційна речовина, одержана з донецького вугілля марки Г крупністю 0-0,1 мм, зольністю 9% і топкового мазуту марки М100. Факторами, які варіюються були вибрані: крупність вихідного вугілля (оцінювалася за зовнішньою питомою поверхнею вугілля S_n), температура грануляційної речовини $t_{гр}$ та витрати реагенту-зв’язуючого Q_m .

Експериментальна область факторного простору: $S_n = 650-4400 \text{ м}^2/\text{г}$ (що відповідає зміні крупності вихідного вугілля від $-0,05 \text{ мм}$ до $0,2-0,5 \text{ мм}$), $t_{гр} = 10-40 \text{ }^\circ\text{C}$, $Q_m = 25-45 \text{ мас.}\%$. Функція відгуку – липкість L золота проби 500 до грануляційної речовини. Липкість вимірювалася по запропонованій нами методиці [35].

Для планування використаний план Бокса-Бенкена [36]. Обробка результатів експерименту виконана за комп’ютерною програмою “Statgraphics”.

Одержаний поліном (регресійна модель) має вигляд:

$$L = 10,3 + 1,7125 Q_m + 5,6 S_n - 7,4125 t_{гр} - 3,8 Q_m^2 - 3,275 Q_m \cdot S_n - 8,8 Q_m \cdot t_{гр} + 3,775 S_n^2 - 4,675 S_n \cdot t_{гр} + 7,4 t_{гр}^2.$$

Коефіцієнти моделі наведено в нормованому (кодованому) виді. Як показує стандартизований комп’ютерний аналіз, найбільший питомий ефект на параметр липкості L справляє температура грануляційної речовини (середовища, в якому здійснюється адгезійний контакт), сукупність факторів “витрати реагенту – температура середовища” та крупність вихідного вугілля. Всі коефіцієнти моделі значимі (рис. 6.48). Це свідчить, зокрема, про правильно обраний факторний простір.

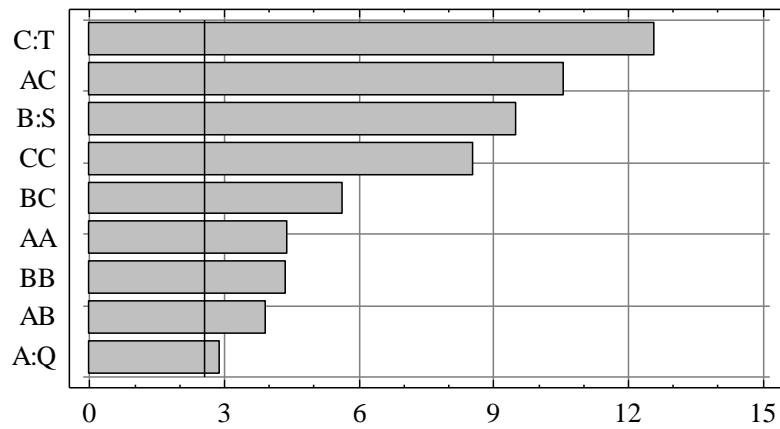


Рисунок 6.48 – Значимість коефіцієнтів моделі (Парето-графік).
Вертикаль відповідає 95% значимості.

На рис. 6.49 подані розрахункові гіперповерхні $L = f(Q_m, t_{rp})$, $L = f(Q_m, S_n)$, $L = f(S_n, t_{rp})$.

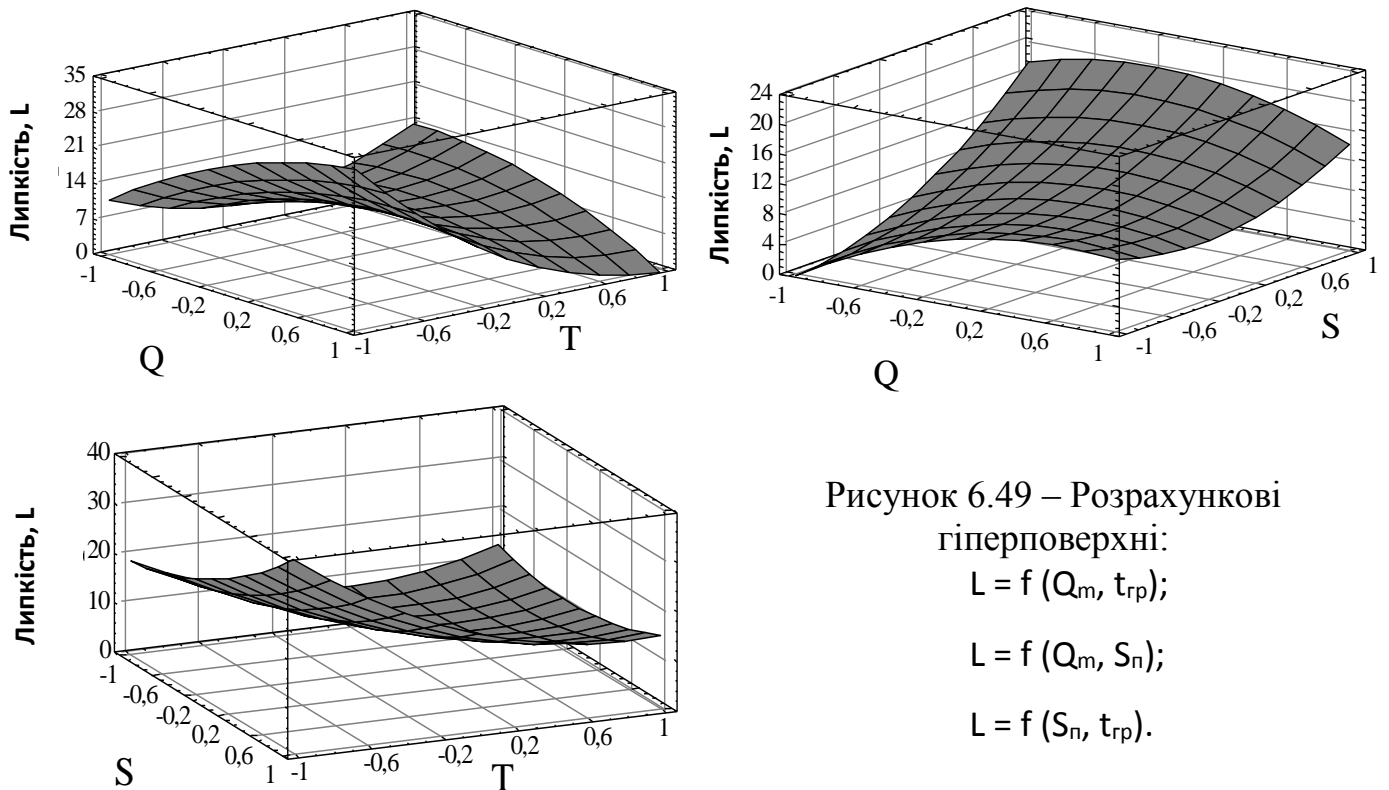


Рисунок 6.49 – Розрахункові
гіперповерхні:
 $L = f(Q_m, t_{rp})$;
 $L = f(Q_m, S_n)$;
 $L = f(S_n, t_{rp})$.

На рис. 6.50: а - перетини цих гіперповерхонь по “головним ефектам”, які показують вплив на параметр L одного фактора при фіксуванні інших на “0”, та б – ефекти парних взаємодій факторів.

Гіперповерхні мають неекстремальних складний характер.

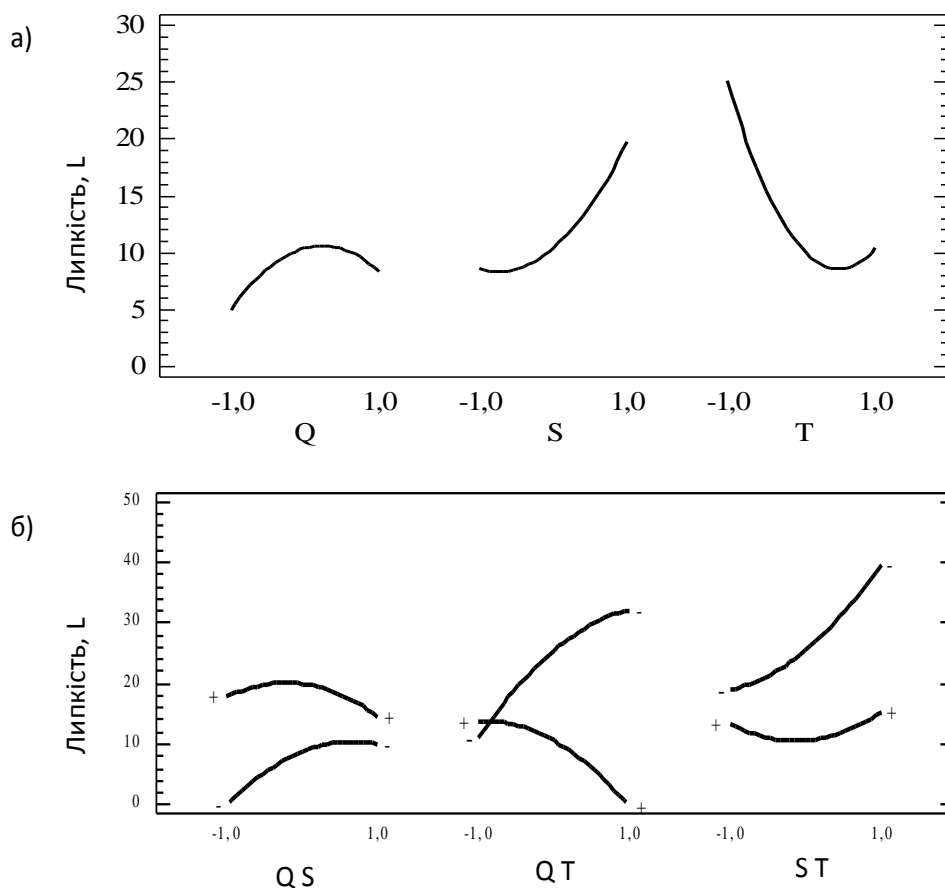


Рисунок 6.50 – Аналіз гіперповерхні рівняння регресії:
 а – перетини гіперповерхні по “головним ефектам”;
 б – ефекти парних взаємодій факторів.

Локальні перетини по “головним ефектам” показують наявність екстремуму-максимуму залежності липкості від витрат реагента, різке зниження липкості при збільшенні крупності вихідного вугілля та збільшенні температури середовища. Фізична суть цих ефектів пояснюється впливом обраних факторів на властивості масляних плівок, а також структурованої тонкодисперсним вугіллям зв’язуючої речовини.

Аналіз ефектів парних взаємодій факторів показує, що липкість досягає максимальних значень при поєднанні: а) значеннях витрат реагенту-зв’язуючого та крупності гранулоутворюючого вугілля близьких до точки “0” матриці планування експеримента; б) мінімальної температури середовища і максимальному вмісті масляного реагента в грануляційній речовині; в) мінімальної температури середовища і максимального подрібнення гранулоутворюючого вугілля.

Одержана модель може бути використана як для поглибленого дослідження впливу на процес адгезійного збагачення тонкодисперсного

золота обраних варіативних факторів, так і для прогнозування липкості гранул-носіїв [37, 38].

6.2.2 Процес зневоднення вугільних шламів фільтруванням за допомогою латексних флокулянтів

Ефективність зневоднення вугільних флотоконцентратів вакуумним фільтруванням в значній мірі залежить від вмісту у вихідному живленні класу менш 63 мкм [39-41]. Під час формування шару осаду на фільтрувальній поверхні тонкі вугільні частинки заповнюють порові простори між більш крупними зернами, що різко зменшує швидкість фільтрування і питому продуктивність процесу. При вмісті класу – 63 мкм більше 50-60 % цей негативний вплив призводить практично до припинення процесу фільтрування [42]. В роботах [43-44] запропоновано використання технології флокуляції (агрегації) тонких вугільних частинок за допомогою синтетичних латексів для підвищення ефективності зневоднення флотоконцентратів. Встановлено, що при витратах латексу 100 - 200 г/т шлама можливе зниження вологості осаду на 0,8 –1% при підвищенні питомої продуктивності вакуум-фільтрів.

Оскільки наведені в технічній літературі дані про цей напрямок використання латексів мають обмежений характер і не дозволяють зробити узагальнюючих висновків, нами проведені лабораторні дослідження впливу синтетичних латексів на цей процес.

Суть досліджень полягала у встановленні впливу природи та витрат згаданих латексів на питомий об'ємний опір осаду (R_{oc}), його вологість (W_{oc}) та питому продуктивність процесу фільтрування по твердому продукту (q).

Дослідження проводилися на лабораторній фільтрувальній установці за методикою, наведеною в роботі [45]. В якості об'єкту досліджень було використано флотоконцентрат вугілля марки Ж ЦЗФ “Київська” зольністю 9 % і вмістом класу – 63 мкм 40 %. Як флокулянти використовували синтетичні латекси БС-30Ф, БС-50 і ПС-100, що відрізнялися один від одного поступовим ростом концентрації стиролу в тому ж ряді (від 30% у БС-30Ф до 100% у латексу ПС-100).

Густина гідросуміші флотоконцентрату в усіх опитах складала 250 кг/м³. Латексний флокулянт змішувався з гідросумішшю безпосередньо у ємності з мішалкою. Процес фільтрування здійснювався після 60 с перемішування з латексом при вакууметричному тиску 70 кПа. Тривалості

набору осаду та його сушки складали 10 с і 20 с відповідно. Ці значення відповідають реальним, що характерні для дискових вакуум-фільтрів ДУ 250 "Сибір".

Результати експериментів приведені у табл.1. На рис.6.51 також наведені залежності $R_{oc} = f(Q)$ та $W_{oc} = f(Q)$, які збудовані на основі даних табл. 6.4.

Таблиця 6.4 – Результати експериментів

Витрати латексу Q , г/т	БС-30Ф			БС-50			ПС-100			Примітки
	R_{oc} , $\times 10^{10}$, m^{-2}	W_{oc} , %	q , $t/(g \cdot m^2)$	R_{oc} , $\times 10^{10}$, m^{-2}	W_{oc} , %	q , $t/(g \cdot m^2)$	R_{oc} , $\times 10^{10}$, m^{-2}	W_{oc} , %	q , $t/(g \cdot m^2)$	
0	16,5	24,8	0,32	16,5	24,8	0,32	16,5	24,8	0,32	фільтрація без латексу
50	5,3	24,1	0,36	8,4	24,4	0,33	12,7	24,6	0,33	
100	1,6	23,7	0,41	5,2	24,1	0,36	10,1	24,5	0,34	
150	0,61	23,5	0,46	3,6	24,0	0,39	9,2	24,4	0,36	
200	0,34	23,4	0,49	2,7	23,9	0,42	8,6	24,4	0,37	

Як видно, латексні флокулянти суттєво зменшують питомий опір осаду R_{oc} . Зменшення R_{oc} при введенні в гідросуміш флотоконцентрату латексів обумовлено агрегацією тонкодисперсних вугільних часток в мікрофлокули. Це суттєво збільшує пористість осаду, знижує його опір, внаслідок чого зростає швидкість фільтрації води. Найбільш впливовішим є латекс БС-30Ф. При його витратах 150-200 г/т величина R_{oc} зменшується в десятки разів. Збільшення концентрації в полімерних ланцюжках латексів БС-50 і ПС-100 стирулу призводить до значного зниження їх впливу на R_{oc} . При витратах латексу ПС-100 200 г/т питомий опір осаду зменшується тільки в 2 рази.

Аналогічна закономірність спостерігається при вивченні залежності $W_{oc} = f(Q)$. Вплив латексів на зниження вологості осаду W_{oc} зростає в

ряду флокулянтів ПС-100 – БС-50 – БС-30Ф. При витратах останнього 100-150 г/т вологість осаду зменшується на 1,1 -1,3 %.

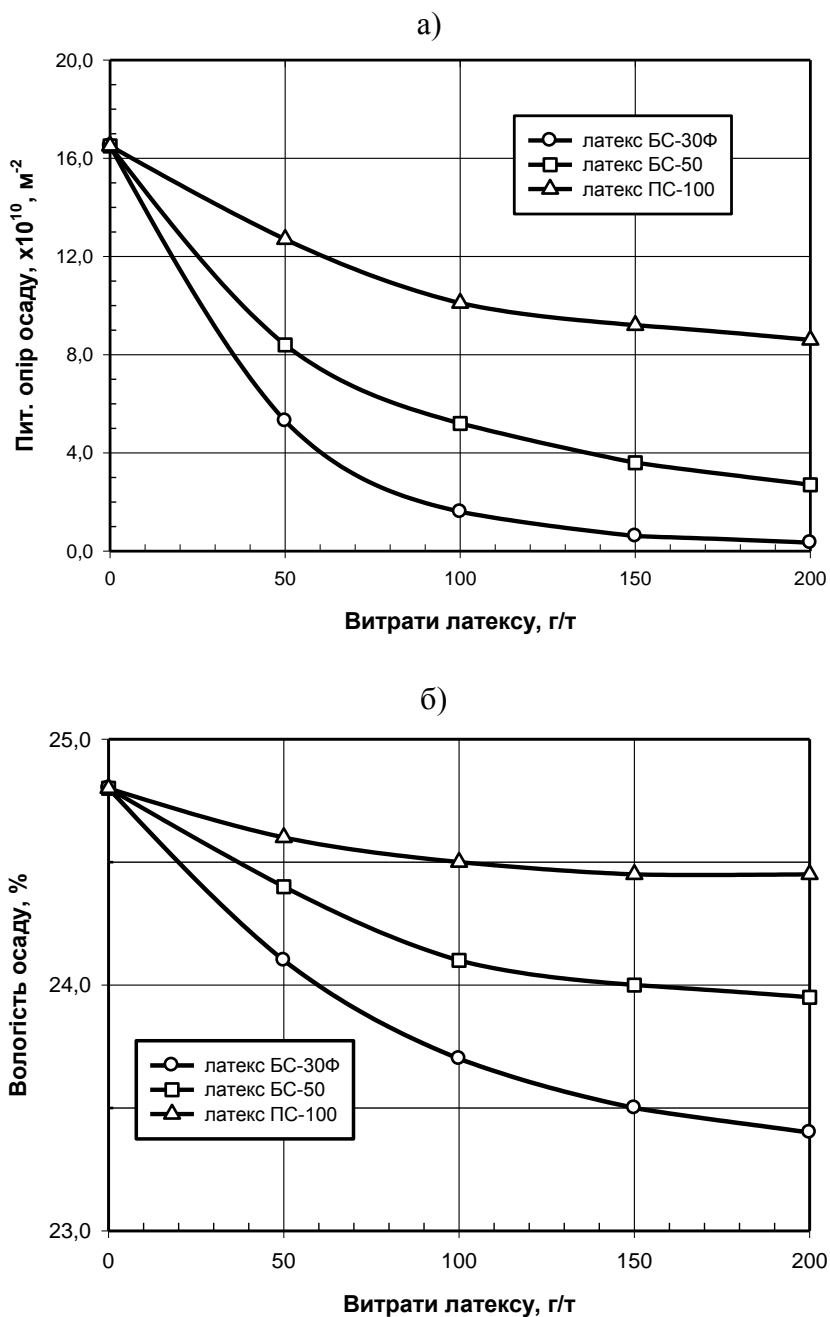


Рисунок 6.51 – Вплив витрат латексних флокулянтів на:
а – питомий опір осаду;
б – вологість осаду.

З використанням програмного модуля SigmaPlot нами проведені дослідження з визначення найбільш оптимальних регресійних моделей, що описують знайдені залежності $R_{oc} = f(Q)$ та $W_{oc} = f(Q)$. Встановлено,

що в обох випадках найбільш високими статистичними характеристиками володіють експоненти рівняння регресії виду:

$$R_{oc} = R_{oc}^o + a \cdot e^{-b \cdot Q} \quad (6.5)$$

$$W_{oc} = W_{oc}^o + a \cdot e^{-b \cdot Q} \quad (6.6)$$

де R_{oc}^o та W_{oc}^o – деякі початкові значення питомого опіру та вологості осаду; a и b – параметри рівняння регресії.

Для латексу БС-30Ф рівняння регресії $R_{oc} = f(Q)$ має вигляд:

$$R_{oc} = 0,1186 + 16,3911 \cdot e^{-0,0233 \cdot Q} \quad (6.7)$$

Оцінки моделі: коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,99988$; стандартна помилка оцінки $SE = 0,1051$.

Для того ж латексу рівняння регресії $W_{oc} = f(Q)$:

$$W_{oc} = 23,267 + 1,5354 \cdot e^{-0,0125 \cdot Q} \quad (6.8)$$

Оцінки моделі: коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,99982$; стандартна помилка оцінки $SE = 0,0150$.

Серед технологічних показників осаду, які реально можуть контролюватися на фабриці, найбільш суттєво змінюється під впливом добавки латексного флокулянта питома продуктивність процесу фільтрування по твердому продукту (q). З даних табл. 6.4 витікає, що обробка латексами гідросуміші вугільного флотоконцентрату призводить до значного збільшення q . Як і у випадку залежностей $R_{oc} = f(Q)$ та $W_{oc} = f(Q)$, зростання цього впливу спостерігається в ряду флокулянтів ПС-100 – БС-50 – БС-30Ф. При витратах латексу БС-30Ф 150-200 г/т питома продуктивність q зростає на 30-50 %.

Для більш змістовного дослідження впливу на питому продуктивність процесу фільтрування його основних технологічних параметрів реалізовано активний факторний експеримент на основі некомпозиційного плану Бокса-Бенкена для трьох факторів: густини гідросуміші (X_1), величини вакууму (X_2), витрат латексу БС-30Ф (X_3). Рівні варіювання факторів наведено у табл.6.5.

Таблиця 6.5 – Фактори та рівні їх варіювання

Фактори	Код фактору	Один. виміру	Рівні факторів		
			-1	0	+1
Густина гідросуміші	X_1	кг/м ³	200	300	400
Вакууметричний тиск	X_2	кПа	40	60	80
Витрати латексу	X_3	г/т	0	100	200

Дослідження проводилися на тій же лабораторній фільтрувальній установці і на тому ж самому вугіллі, що і у попередніх експериментах.

Розробка та аналіз рівняння регресії здійснювалося за допомогою програми Statgraphics Plus. Як видно з парето-графіка, що наведений на рис.6.52, статистично значимими є більшість коефіцієнтів рівняння регресії за винятком коефіцієнтів при парній взаємодії X_2X_3 та квадратичному члені X_2^2 .

З урахуванням значимості коефіцієнтів рівняння регресії має вигляд:

$$q = 0,2933 + 0,05 \cdot X_1 + 0,0875 \cdot X_2 + 0,0775 \cdot X_3 + 0,0333 \cdot X_1^2 - 0,015 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,02 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0,0383 \cdot X_3^2 \quad (6.9)$$

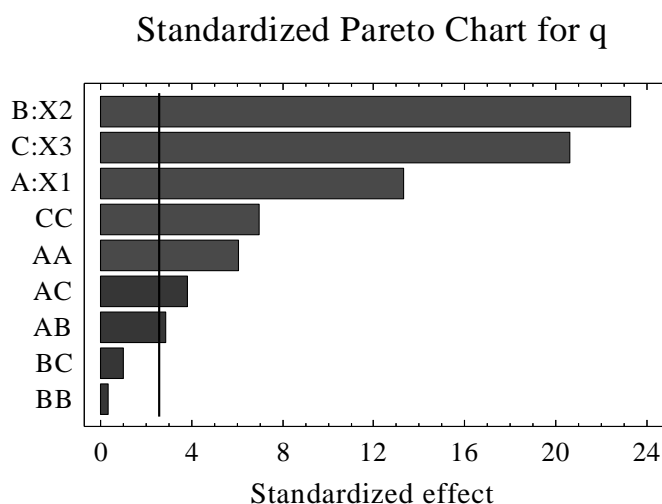


Рисунок 6.52 – Парето-карта коефіцієнтів моделі (вертикальна лінія відповідає 95 % значущості коефіцієнтів);

Адекватність регресійної моделі підтверджується високим значенням коефіцієнту детермінації $R^2 = 99,60 \%$, та малою величиною стандартної помилки оцінки $SE = 0,01065$.

На рис.6.53 представлені часткові тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції. Як видно, зростання величини кожного з факторів, що досліджуються, призводить до збільшення питомої продуктивності процесу фільтрації. Найбільш впливовішим фактором є вакууметричний тиск X_2 . Зростання вакууметричного тиску з 40 до 80 кПа викликає збільшення величини q в середньому на 50-60 %. Значущість коефіцієнту при парній взаємодії X_1X_2 свідчить про помітний вплив вакууметричного тиску на характер залежності $q = f(X_1)$. Дійсно, як видно з тривимірного графіка $q = f(X_1X_2)$, при великих значеннях вакууметричного тиску ($X_2 \rightarrow +1$) зростаюча функція $q = f(X_1)$ майже нівелюється, тобто густина гідросуміші істотно не впливає на питому продуктивність процесу фільтрації. Це підтверджує відомий факт, що механічні фактори в процесі зневоднення фільтрування є домінуючими.

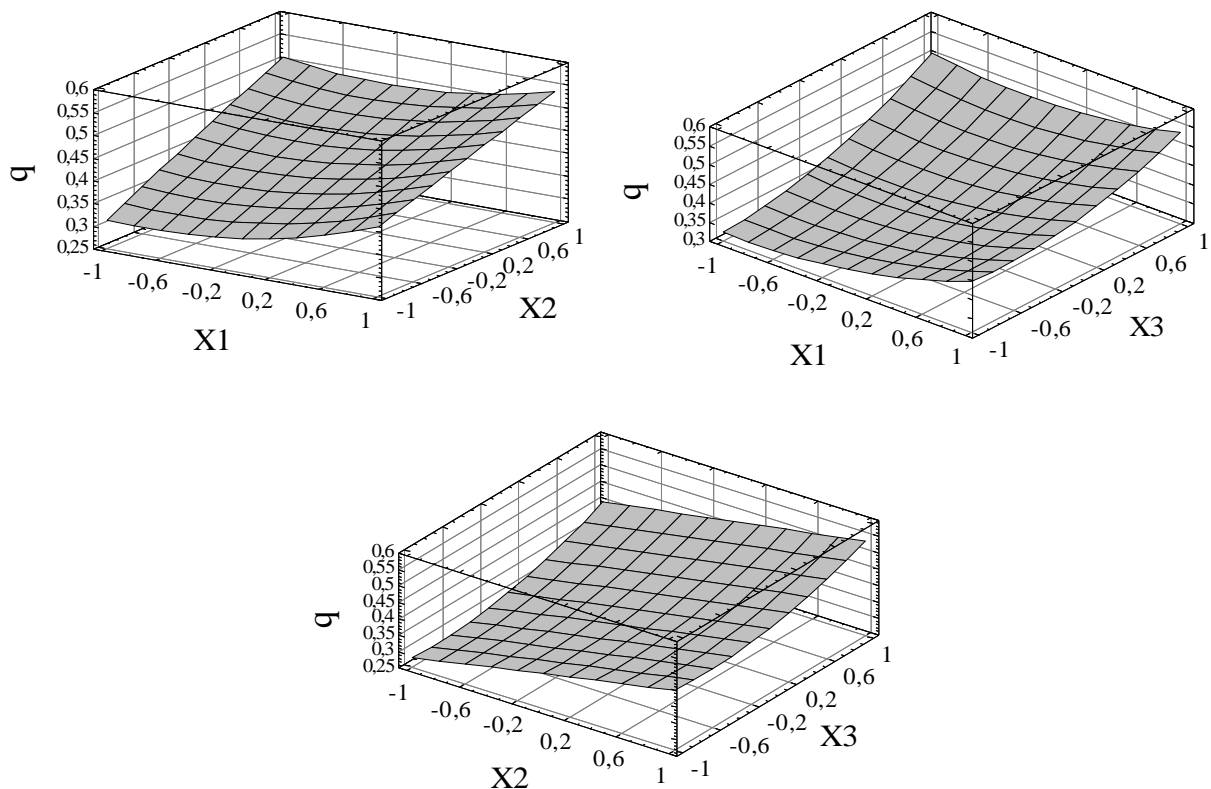


Рисунок 6.53 – Тривимірні перетини поверхні цільової функції

При витратах латексного флокулянта (фактор X_3) 100-200 г/т спостерігається збільшення питомої продуктивності фільтрації q в середньому на 20-50 %. Значущість коефіцієнту при парній взаємодії X_1X_3 вказує на суттєвий взаємний вплив цих факторів на цільову функцію q . Зростання витрат флокулянта (значень фактору X_3) значно зменшує вплив густини гідросуміші (фактору X_1) на питому продуктивність процесу. Це, імовірно, обумовлено певною стабілізацією в'язкості гідросуміші при агрегації латексом вугільних часток в мікрофлокули. Тому застосування латексів для підвищення ефективності вакуумного фільтрування достатньо ефективно у широкому діапазоні густини вихідної гідросуміші.

6.2.3 Процес зневоднення вуглемасляного агломерату центрифугуванням

Підвищення ефективності механічного зневоднення вугілля, що передається гідравлічним транспортом, можливе шляхом застосування нових комплексних технологій, що поєднують операції механічного зневоднення і фізико-хімічної обробки вугільної поверхні, наприклад, технології масляної агрегації. Остання забезпечує, по-перше, гідрофобізацію вугільної поверхні, і, по-друге, структурування тонкодисперсного вугілля у водному середовищі в агломерати-гранули за допомогою масляних реагентів. В основі цих процесів лежить механізм адгезійної взаємодії олеофільної вугільної поверхні з маслами, в результаті якого досягається її селективне змочування і агрегування в турбулентному потоці води [46-50].

Ефект зневоднення вугілля при його пелетуванні пояснюється як результат адгезійних взаємодій на межі розділу фаз вугілля-зв'язуюче і аутогезійних контактів зерен та мікрогранул по поверхневих плівках зв'язуючого, які приводять до витіснення гідратної плівки з вугільної поверхні та об'єму гранули. Другу основну операцію процесу масляної грануляції, – зневоднення агломератів, – здійснюють на відсаджувальних центрифугах.

Зневоднення вугілля із застосуванням процесів центрифугування та масляної агрегації, як показали дослідження і практика вуглезбагачення, особливо перспективні у схемах підготовки вугілля до коксування (приклад – Губахінський КХЗ) та для вирішення задачі зневоднення гідравлічно транспортованого вугілля. Досягнута при цьому вологість –

10-11% є кондиційною і практично виключає необхідність термосушіння, яке є одним з найбільш дорогих процесів технологічного ланцюга збагачення вугілля, крім того, екологічно брудним та пожежонебезпечним [46].

Мета цієї роботи – дослідження процесу зневоднення дрібнодисперсного вугілля поєднанням процесів “центрифугування – масляна агломерація” із застосуванням методу планування експерименту та одержання і аналіз математичних моделей процесу зневоднення.

Для одержання регресійної моделі досліджуваного процесу використано центрально-композиційний рототабельний план другого порядку для чотирьох факторів, вибраних на основі попередніх досліджень: зовнішня питома поверхня вугілля S_v , витрата зв’язуючої речовини Q_{zv} , фактор Фруда F_r , тривалість центрифугування $t_{ц}$. Фактори та границі їх варіювання наведені в таблиці 6.6.

Таблиця 6.6 – Фактори та границі їх варіювання

Фактор	Код фактора	Одиниця вимірювання	Рівні факторів		
			-1	0	+1
Зовнішня питома поверхня вугілля, S_v	X_1	см ² /г	1000	1500	2000
Витрата зв’язуючої речовини, Q_{zv}	X_2	%	2,5	4,0	5,5
Фактор Фруда, F_r	X_3		400	700	1000
Тривалість центрифугування, $t_{ц}$	X_4	с	3	5	7

Об’єктом досліджень була грануляційна речовина, одержана з вугілля марки Г крупністю 0-2 мм, зольністю 10,2% і топкового мазуту марки М100.

Експериментальна область факторного простору: $S_v = 1000-2000$ м²/г (що відповідає зміні крупності вихідного вугілля від 6-0 мм до 1-0 мм), $Q_{zv} = 2,5-5,5$ мас.%, $F_r = 400-1000$, $t_{ц} = 1-5$ с. Цільова функція – вологість W_a^r зневоднених центрифугуванням агрегатів. Розробка плану експерименту, визначення значущості коефіцієнтів моделі та її аналіз виконані за допомогою комп’ютерної програми Statgraphics. Одержаний поліном має вигляд:

$$W = 18,75 + 4,025 \cdot X_1 - 1,883 \cdot X_2 - 0,5583 \cdot X_3 - 0,3750 \cdot X_4 - 1,185 \cdot X_1^2 - 0,2229 \cdot X_2^2 - 0,2479 \cdot X_4^2$$

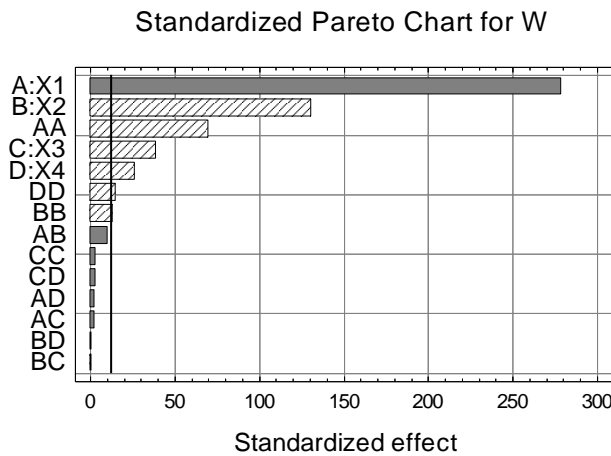


Рисунок 6.54 – Значимість коефіцієнтів моделі (парето-графік). Вертикаль відповідає 95% значимості.

Коефіцієнти моделі наведено в нормованому вигляді. Модель адекватна процесу, що досліджується. Про це свідчить високе значення коефіцієнта детермінації ($R^2 = 99,01\%$). На рис. 6.54 подано стандартизований парето-графік, згідно якого коефіцієнти A, B, AA, C, D, BB і DD статистично значимі. Найбільший вплив на вологість зневодненого

продукту має зовнішня питома поверхня вугілля S_B . Інші фактори впливають на цільову функцію значно менше.

На парето-графіку показано характер впливу факторів та ефектів їх взаємодій на вологість W_B^r . При цьому виділено фактори і ефекти – складові регресії, які знижують вологість зневодненого вугілля (гістограми зі знаком “–”) і збільшують її (гістограми зі знаком “+”).

На рис. 6.55 подані часткові тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції $W_a^r(S_B, Q_{3B})$ і $W_a^r(F_r, t_{ц})$. На рис. 6.56 наведені контурні криві цих гіперповерхонь.

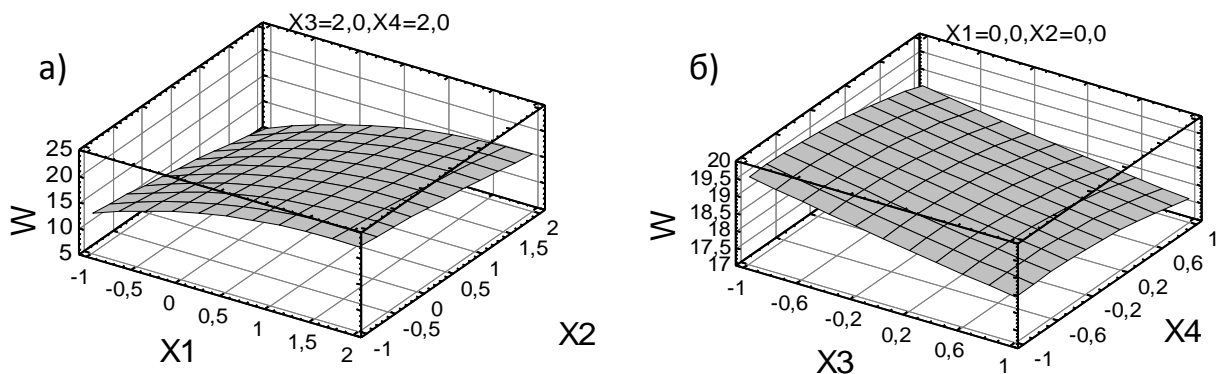


Рисунок 6.55 – Часткові тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції.

а) $W_a^r(S_B, Q_{3B})$; б) $W_a^r(F_r, t_{ц})$

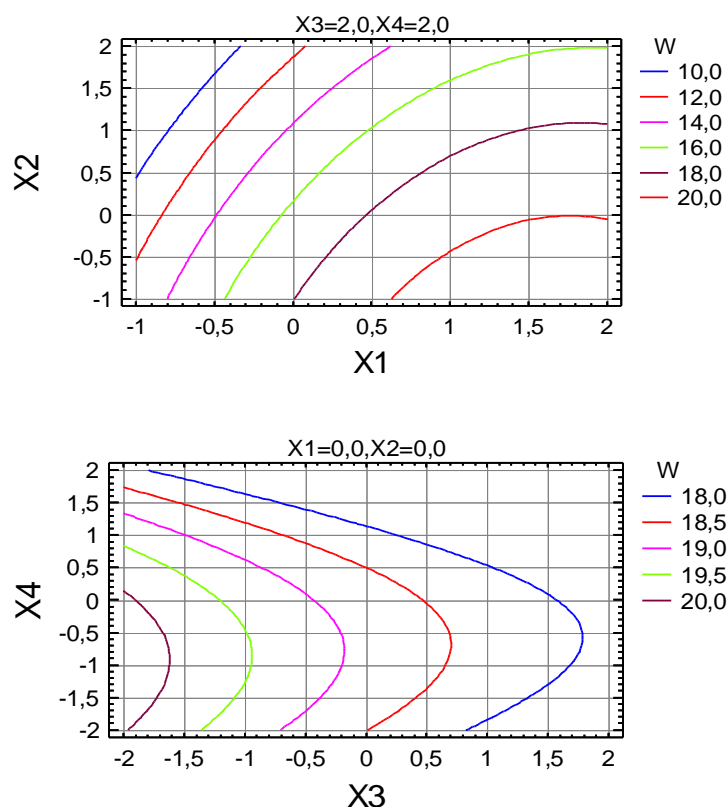


Рисунок 6.56 Контурні криві гіперповерхонь

Як видно з наведених рис. 6.55 і 6.56, зростання зовнішньої питомої поверхні вугілля S_v в діапазоні значень факторного простору приводить до суттєвого збільшення вологості зневоднюваних вугільно-масляних агрегатів. При цьому спостерігається спочатку різке збільшення W_v^r в діапазоні значень S_v від -1 до $0,5$ ($1000-1750 \text{ см}^2/\text{г}$), подальше збільшення S_v понад $1750 \text{ см}^2/\text{г}$ значно менше впливає на цільову функцію.

Крива $W_a^r(S_v)|_{S_v > 2000}$ виположується. Позитивний ефект від зростання витрат зв'язуючого та збільшення фактору Фруда носить рівномірний неекстремальний характер в даному факторному просторі. Час перебування матеріалу у центрифугі порівняно менше впливає на його вологість.

Аналіз ефектів парних взаємодій факторів показує, що вологість досягає мінімальних значень при поєднанні значення витрат реагенту-зв'язуючого більше $4 \text{ мас.}\%$ та зовнішньої поверхні вугілля близької до точки “-1” матриці планування експерименту.

6.2.4 Процес зневоднення дрібнодисперсних матеріалів методом зриву водної плівки

Ефективне зневоднення дрібнодисперсних матеріалів є актуальною проблемою сучасних технологій збагачення корисних копалин [40, 51, 52]. Традиційні методи зневоднення, - центрифугування, фільтрація,

зневоднююче грохочення, - в ряді випадків не забезпечують потрібного рівня вологості кінцевого продукту [52].

В роботах [35, 43, 53-57] запропоновано новий високоефективний метод зневоднювання дрібного матеріалу зривом водної плівки (метод ЗВП) у швидкісному струмені повітря. Вітчизняними дослідниками опрацьовано оригінальний спосіб реалізації цього методу ежектуванням зневоднюваного матеріалу [43, 57]. Разом з тим, до сьогодні процес зневоднення ежектуванням досліджено на первинному емпіричному рівні без системного підходу до вивчення факторних взаємозв'язків. Це утруднює розробку теоретичних основ і раціональних конструкцій ежекторних установ.

Суть досліджень полягала у вивченні впливу на вологість W_p зневодненого продукту таких факторів: швидкості повітря на зрізі сопла ежектора (X_1), температури повітря (X_2), середнього діаметра частинок зневоднюваного матеріалу (X_3) та зольності вугілля (X_4). В якості останнього прийнято вугільний шлам марки ДГ шахти Південно-Донбаська № 1. Рівні варіювання факторів наведено у таблиці 6.7.

Таблиця 6.7 – Фактори та рівні їх варіювання

Фактори	Код	Один. виміру	Інтервал варіювання	Рівні факторів				
				-2	-1	0	+1	+2
Швидкість повітря (газу)	X_1	м/с	50	50	100	150	200	250
Температура газу	X_2	°C	15	0	15	30	45	60
Середній діаметр частинок	X_3	мм	0,8	0,2	1,0	1,8	2,6	3,4
Зольність вугілля	X_4	%	6	8	14	20	26	32

Процес зневоднення реалізувався на полігонній установці, схема якої наведена на рис. 6.57. Вологість вихідного вугілля складала 18-20 % при збереженні його сипучості.

Розробка плану експерименту та аналіз одержаного рівняння регресії здійснено за допомогою комп'ютерної програми Statgraphics Plus. При цьому реалізовано центрально-композиційний рототабельний план типу 2^4 з зірковими точками.

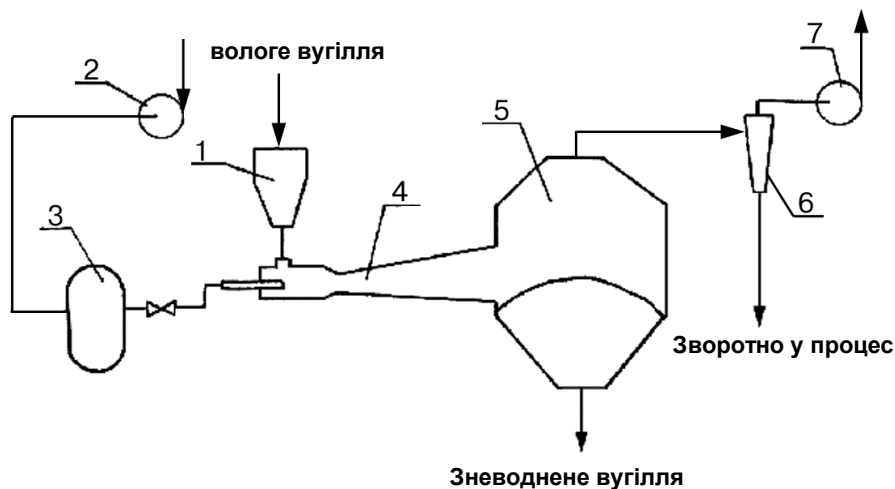


Рисунок 6.57 – Схема установки зневоднення вугілля механічним зливом водної плівки:

1- бункер вологого вугілля; 2- компресор; 3 – ресивер; 4 – ежектор; 5- збірник; 6 – циклон; 7 – вентилятор.

На рис.6.58 представлено паретто-графік і графік порівняння розрахункових та експериментальних даних. Коефіцієнт детермінації $R^2 = 98,29 \%$, показник втрат узгодженості функції Lack-of-fit $P = 0,1989$, а стандартна помилка оцінки $SE = 0,0707$, що свідчить про адекватність регресійної моделі.

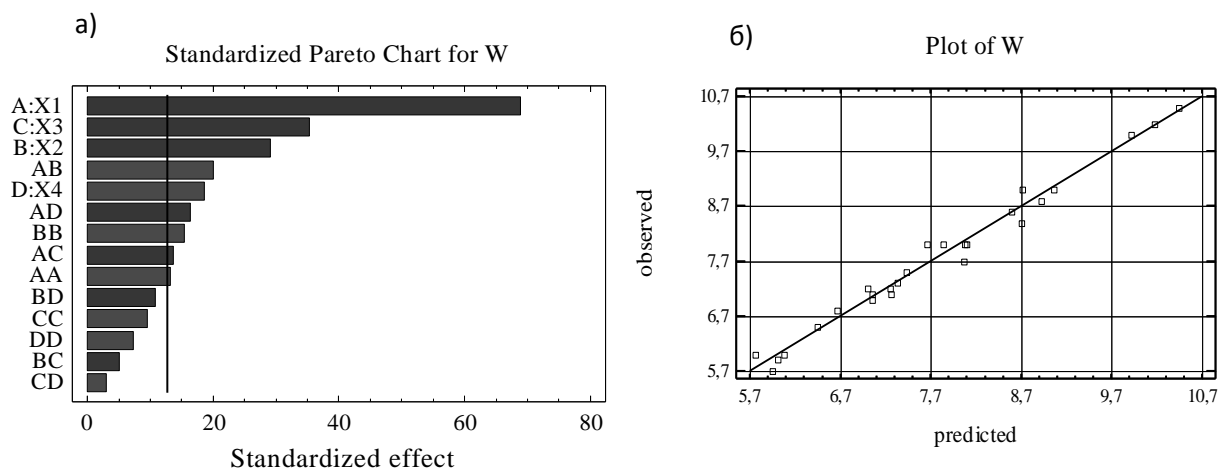


Рисунок 6.58 – Статистичні оцінки регресійної моделі:

а) паретто-графік (вертикальна лінія відповідає 95 % значущості коефіцієнтів);

б) графік порівняння експериментальних (observed) і розрахункових (predicted) значень цільової функції.

На рис. 6.58 б) показано взаємозв'язок одержаних і розрахункових даних. Основна частина експериментальних точок знаходиться в околиці прямої, що ще раз побічно підтверджує висновок про адекватність моделі.

Значущими є більшість коефіцієнтів моделі, за винятком коефіцієнтів при парних взаємодіях X_2X_4 , X_2X_3 , X_3X_4 та коефіцієнтів при X_1^2 , X_3^2 та X_4^2 .

З урахуванням значущості коефіцієнтів рівняння регресії має вигляд:

$$W = 7,050 - 0,9917 \cdot X_1 - 0,4167 \cdot X_2 - 0,5083 \cdot X_3 + 0,2667 \cdot X_4 + 0,2208 \cdot X_1^2 + 0,3500 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,2375 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,2875 \cdot X_1 \cdot X_4 + 0,2583 \cdot X_2^2$$

Як видно з паретто-графіка (рис.6.58 а) та рівняння регресії, найбільш значимим є фактор X_1 – швидкість струменя повітря на зрізі сопла ежектора. Далі за значущістю фактори слідують у такому порядку: X_3 , X_2 , X_4 .

На рис.6.59 показано тривимірні перетини цільової функції $W_{\text{п}}$ (X_1 , X_2 , X_3 , X_4), а на рис. 6.60 – контурні криві цих поверхонь.

Згідно рис. 6.59 і 6.60, збільшення значень фактора X_1 однозначно веде до суттєвого зниження вологості зневодненого продукту. Разом з тим простежується певне нівелювання впливу механічного фактора X_1 при збільшенні температури повітря X_2 . У свою чергу, при малих значеннях фактора X_1 спостерігається спадна залежність $W_{\text{п}}$ (X_2). При збільшенні швидкості повітря X_1 вказана залежність $W_{\text{п}}$ (X_2) нівелюється. Отже, механічний фактор превалує над тепловим.

Другим за значущістю впливу на цільову функцію $W_{\text{п}}$ є середній діаметр частинок X_3 . З його збільшенням спостерігається зниження вологості вугілля. Разом з тим, при невеликих значеннях швидкості повітря X_1 залежність $W_{\text{п}}$ (X_3) майже не простежується. А при зростанні X_1 маємо чітко виражену спадну функцію $W_{\text{п}}$ (X_3), що свідчить про роботоздатність методу ЗВП саме при високих значеннях швидкості повітря X_1 .

Аналогічна картина спостерігається для перетину гіперповерхні $W_{\text{п}}$ (X_2 , X_3), де чітко видно зменшення вологості вугілля при збільшенні температури повітря.

Найменш суттєво впливає на вологість зневодненого методом ЗВП вугілля його зольність. Хоча можна констатувати наявність тенденції до збільшення вологості $W_{\text{п}}$ зі зростанням зольності X_4 . Водночас при

збільшенні кількісних значень факторів X_1 та X_2 вплив фактора X_4 нівелюється.

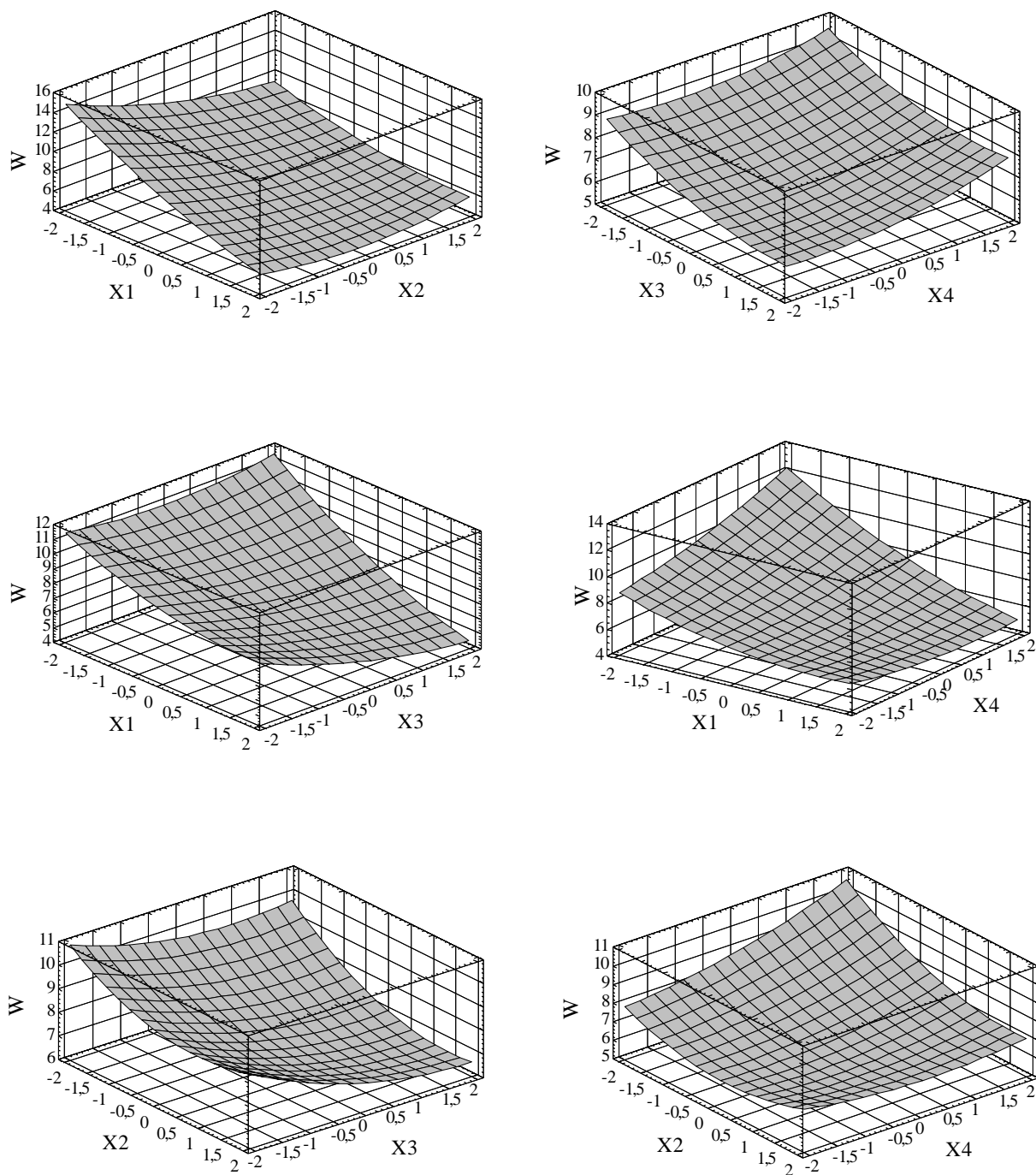


Рисунок 6.59 – Тривимірні перетини цільової функції $W_{\pi}(X_1, X_2, X_3, X_4)$

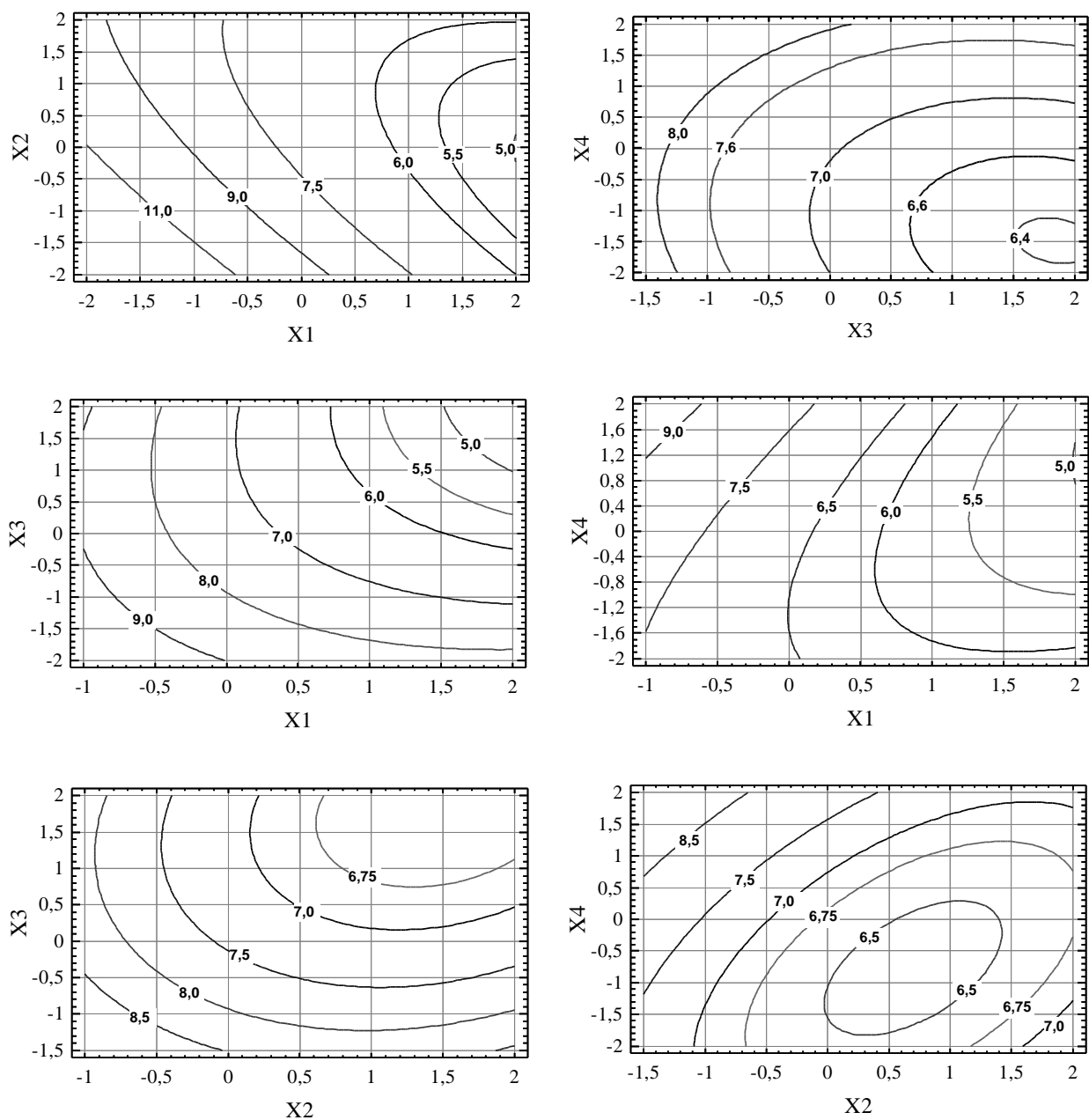


Рисунок 6.60 – Контурні криві цільової функції $W_p(X_1, X_2, X_3, X_4)$

6.2.5 Процес знесолення вугілля

Вичерпання запасів високоякісного вугілля обумовлює необхідність видобутку і переробки забалансної та низькоякісної паливної сировини. До такої, зокрема, належить так зване “солоне” вугілля, родовища якого

відомі в Німеччині, Польщі, США, Україні, Казахстані, Росії, Чехії, Великобританії, Австралії та ін. країнах.

“Солоним” прийнято називати вугілля з аномально підвищеним вмістом лужних металів, в основному, натрію. Критерієм “солоності” більшість дослідників приймають вміст оксиду натрію (Na_2O) у вугіллі або його золі. В Україні до солоного зараховують вугілля зі вмістом $\text{Na}_2\text{O} \geq 2\%$ в золі або 0,3% на суху масу вугілля [42]. Розвідані запаси солоного вугілля в Україні досить істотні – вони складають понад 10 млрд. т. і зосереджені у Богданівському (Луганська область) та Новомосковському (Дніпропетровська область) родовищах [43].

Основні причини, які обумовлюють віднесення “солоного” вугілля до низькоякісної сировини є те, що легкоплавкі сполуки лужних металів, особливо натрію, викликають активне шлакування робочих поверхонь котлів при спалюванні вугілля. Крім того, хлор виступає як основний кородуючий агент, а також активно забруднює довкілля [58].

Сьогодні в світі опрацьовано декілька альтернативних варіантів переробки солоного вугілля – газифікація, спалювання, комплексна переробка, причому найрадикальнішим способом його облагороджування є знесолення вугілля промивкою, наприклад, суміщеною з гідротранспортом. Основним недоліком цієї технології є виникнення великої кількості тонких фракцій вугілля, які при своїй природній гідрофільності практично не піддаються ефективному зневодненню механічними засобами. Для уникнення цього недоліку в ДонНТУ опрацьована технологія знесолення вугілля типу “вугілля-агломерація”, яка передбачає його попереднє часткове обмаслення, знесолення промивкою у воді і подальшу агломерацію з використанням активних гідрофобних (обмаслених) ділянок на поверхні вугілля.

Ця робота є розвитком виконаних раніше досліджень [58] процесу знесолення обмасленого вугілля шляхом планування експерименту. Об'єктом досліджень служило вугілля пласта C_{12} Новомосковського родовища Західного Донбасу. Вміст Na_2O в цьому вугіллі становив 0,9 %, зольність - 20 %. Вугілля перед знесолюванням заздалегідь обмаслювалося по запропонованій нами технології.

Функція відгуку – залишковий вміст Na_2O у вугіллі. Факторами, які варіюються на основі результатів досліджень [59] були вибрані: тривалість промивки τ_0 , режим турбулізації водовугільної суміші (частота обертання імелера мішалки n_m), густина пульпи ρ_n (Т:Ж) та і витрата зв'язуючого Q_1

для обмаслення вугілля. Як обмаслювач використаний композиційний реагент на основі топочного мазуту марки М 100 і флотореагента ААР–1. Вибрані чинники задовольняють вимогам керованості, однозначності, сумісності і незалежності, яким повинні задовольняти варіативні чинники при плануванні експеримента. Експериментальна область факторного простору: діапазон варіювання тривалості промивки τ_0 прийнятий 2-10 хв, частота обертання імелера мішалки n_m - 1000-2000 хв⁻¹, ρ_n - 100-300 г/л, що відповідає рекомендаціям ІМР і ВНИИПИГТ [59]. Діапазон зміни чинника Q_1 вибраний рівним 0,1-0,4 мас.% на основі виконаних нами раніше експериментів. Фактори та границі їх варіювання показано в таблиці 6.8.

Таблиця 6.8

Рівень факторів та інтервал варіювання	Параметр τ_0 , хв	Параметр n_m , хв ⁻¹	Параметр ρ_n , г/л	Параметр Q_1 , мас. %
Кодове позначення	X_1	X_2	X_3	X_4
Інтервал варіювання	4	500	100	0,15
Нижній рівень $X_i = -1$	2	1000	100	0,1
Основний рівень $X_i = 0$	6	1500	200	0,25
Верхній рівень $X_i = 1$	10	2000	300	0,4

Для планування прийнятий рототабельний центральном-композиційний план експерименту, який забезпечує однакову точність моделі за всіма напрямками гіперпростору при мінімальній кількості експериментів. Обробка результатів експерименту виконана за комп'ютерною програмою “Statgraphics”.

Як видно з паретто-графіка (див. рис. 6.61) статистично значимими є коефіцієнти при лінійних та квадратичних членах рівняння регресії. Тобто одержана модель є моделлю другого порядку. Коефіцієнти, які враховують ефекти парних взаємодій, статистично незначимі. Крім того, з рис. 1 видно, що найбільш значимими з досліджених параметрів є тривалість промивки X_1 , далі за значимістю фактори знаходяться в ряду: X_4 , X_3 , X_2 .

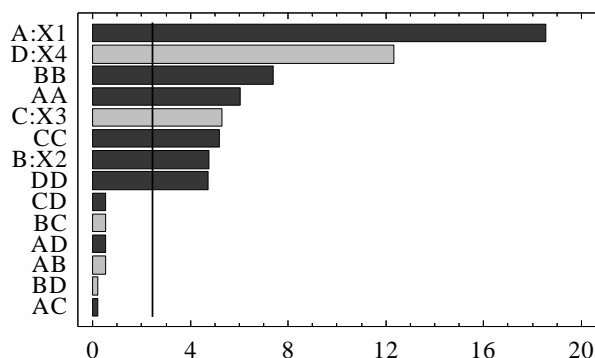


Рисунок 6.61 – Парето-карта коефіцієнтів моделі (вертикальна лінія відповідає 95% значущості)

З урахуванням цього одержаний поліном (рівняння регресії) має вигляд:

$$Y = 0,4443 - 0,0571 \cdot X_1 - 0,0146 \cdot X_2 + 0,0163 \cdot X_3 + 0,0379 \cdot X_4 - 0,01701 \cdot X_1^2 - 0,0208 \cdot X_2^2 - 0,0146 \cdot X_3^2 - 0,0133 \cdot X_4^2$$

Проаналізуємо одержаний вираз. На рис. 6.62 та 6.63 відповідно показано тривимірні перетини гіперповерхні $Y(X_n)$ та контурні криві цих поверхонь.

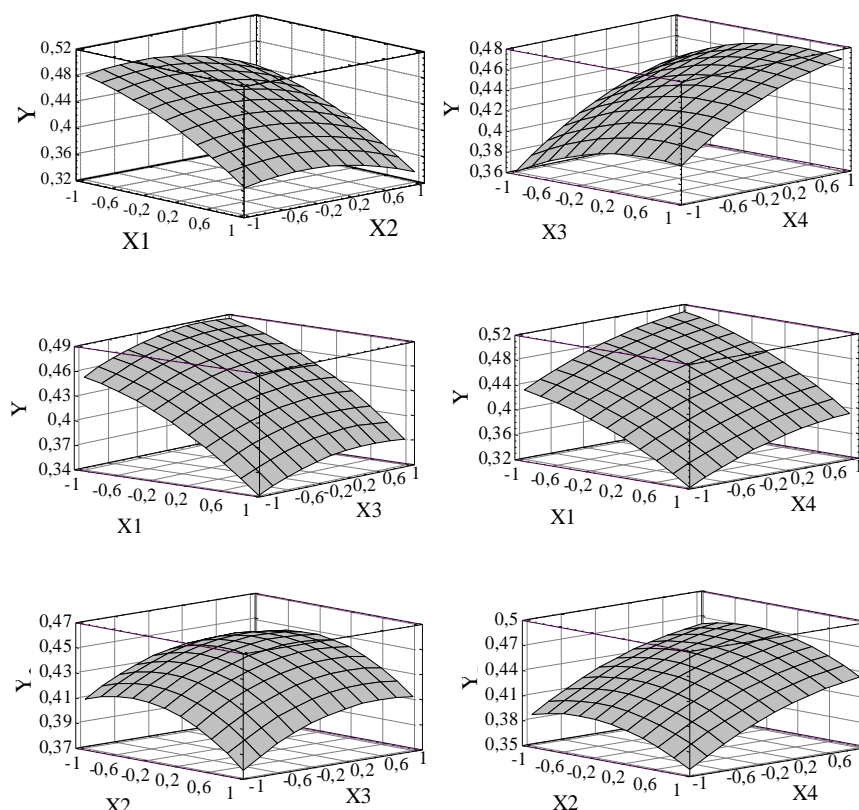


Рисунок 6.62 – Тривимірні перетини гіперповерхні $Y(X_n)$.

Як бачимо, при збільшенні тривалості агітації гідросуміші (X_1) та інтенсивності перемішування (X_2) спостерігається зменшення залишкової концентрації Na_2O у вугіллі. Залежність цієї концентрації від факторів густина пульпи (X_3) та і витрат масляного агента-зв'язуючого (X_4) пряма – зі збільшенням цих параметрів збільшується і залишкова концентрація Na_2O у вугіллі. Це загалом відповідає описаному в [58] механізму процесу знесолення вугілля.

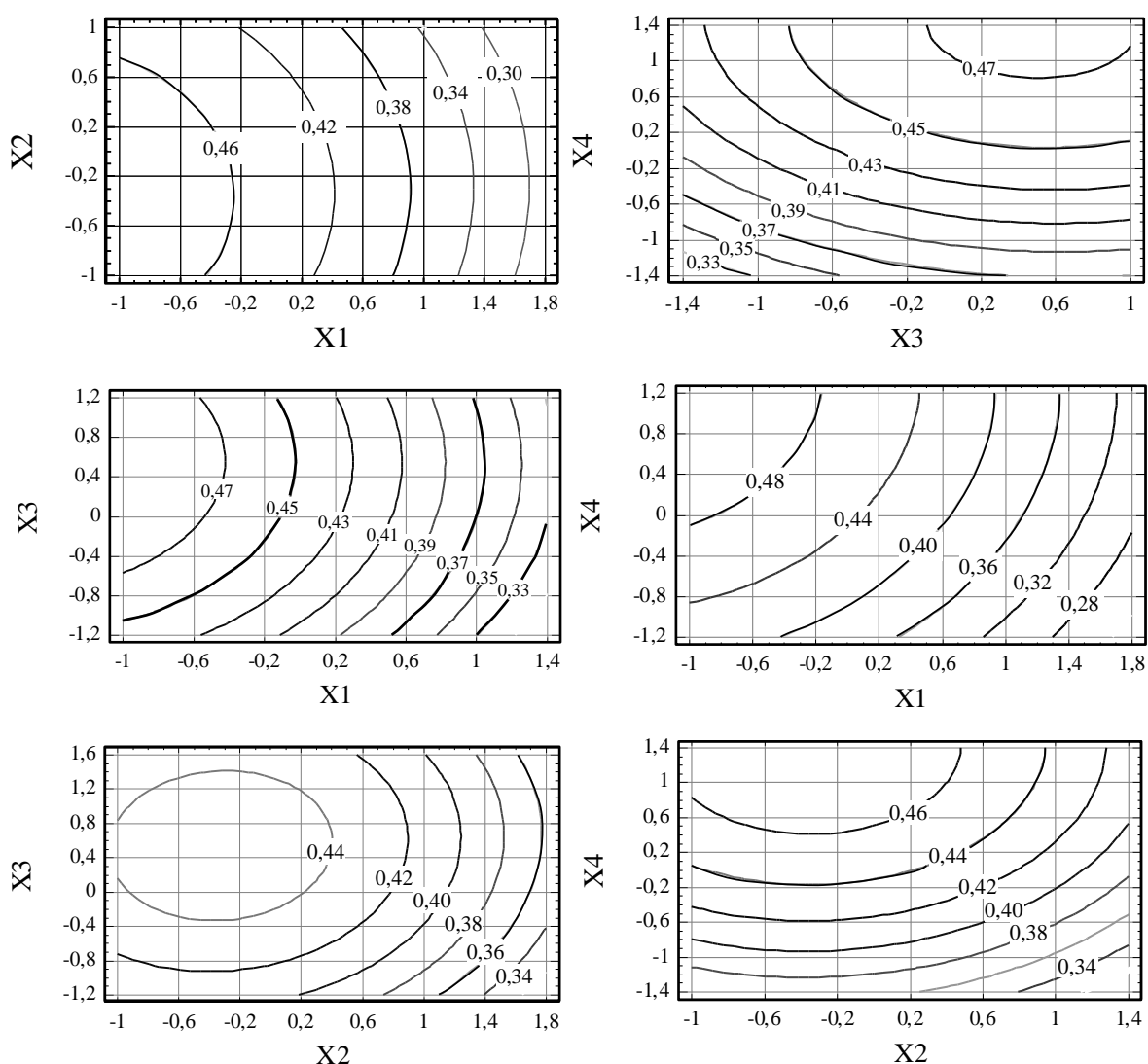


Рисунок 6.63 – Контурні криві

Одержана модель може бути використана при розробці промислових технологій облагороджування солоного вугілля Західного та Північно-Східного Донбасу[59].

6.2.6 Процес селективного подрібнення руд

Процес селективного подрібнення мінералів руд, який має суттєве значення в збагаченні корисних копалин, вивчався на прикладі руд Мазурівського родовища (дослідження проведені за участі К.Л. Шпильового, інж., ТОВ «Азов-Мінералтехніка», м.Маріуполь).

При подрібненні основного різновиду руд Мазурівського родовища – маріуполіту, - відбувається суттєвий приріст масової частки пентоксиду ніобію в тонких класах. Такий приріст можна використати для фракціонованого збагачення крупних та дрібних класів після подрібнення. Але таке фракціонування має передбачати високу ефективність технології вилучення пентоксиду ніобію з тонких класів. Виходячи з критерію кращого розкриття руд, що визначається ступенем розкриття та коефіцієнтом ефективності рудопідготовки по розкриттю руди, оптимальним для руд Мазурівського родовища є подрібнення у апараті відцентрово-ударного типу.

Для обґрунтування раціональних технологічних параметрів селективного подрібнення руди дослідження проводилися у відцентровому млині відцентрово-ударного типу ДЦ-0,36. Млин був оснащений динамічним відцентровим сепаратором та системою пилеочищення.

Вивчалася залежність вмісту класу -0,044 мм у подрібненому продукті від частоти обертання ротора (прискорювача) млина, навантаження на млин по вихідній руді та крупності вихідної руди.

Вплив основних факторів на вміст (C, %) класу -0,044 мм у подрібненому продукті вивчали за допомогою активного експерименту. Для планування експерименту застосовували ротатабельний центральний композиційний план другого порядку [60], який дозволяє одержати однакову точність поліноміальної моделі у всіх напрямках факторного простору у вигляді:

$$Y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i X_i + \sum_{1 \leq i, l \leq k} b_{il} X_i X_l + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} X_i^2,$$

де Y - функція відгуку; b_0 - вільний член; b_i , b_{il} , b_{ii} - коефіцієнти при змінних, коваріаціях та квадратичних членах; X_i - лінійні ефекти; $X_i X_l$ - парні взаємодії; X_i^2 - квадратичні члени; k – число незалежних змінних.

В основі методу лежить факторне планування типу ПФЕ 2^n , матриця якого доповнюється «зоряними точками» і нульовими (центральними) точками.

Ядро плану представлено напівреплікою 2^3 ($1=X_1X_2X_3$). Реалізовувалось 8 дослідів на основних рівнях та ще 6 дослідів в зіркових точках (величина зіркового плеча в цьому випадку дорівнює 1,682), і шість дослідів в центрі плану.

Вибрані фактори задовольняють вимогам керованості, незалежності, однозначності, яким повинні задовольняти варіативні чинники при плануванні експерименту.

Основні рівні, інтервали варіювання факторів та межі області дослідження, наведені в табл. 6.9, вибрані на основі апріорної інформації [61] та за результатами попередніх експериментів. Матриця планування та результати її реалізації наведені у табл. 6.10.

Таблиця 6.9 – Основні рівні, інтервали варіювання факторів та межі області дослідження

Параметр	Позначення	Код	Одиниці виміру	Основні рівні				
				+1,682	+1	0	-1	-1,682
Колова швидкість ротора відцентрового млина	V	X_1	м/с	86,88	80	70	60	53,18
Крупність вихідної руди	d	X_2	мм	18,7	16	12	8	5,3
Витрати вихідної руди	Q	X_3	кг/год	2841	2500	2000	1500	1159

Обробку результатів експериментів та аналіз регресійних моделей здійснювали за допомогою модуля „Планування експерименту” статистичної програми Statgraphics 5.1 Plus [62].

Таблиця 6.10 – Матриця планування і результати її реалізації

№	X1	X2	X3	C _{експ.}	C _{розн.}
1	-1,0	-1,0	-1,0	50,86	50,6663
2	1,0	-1,0	-1,0	72,85	73,8741
3	-1,0	1,0	-1,0	35,65	35,9311
4	1,0	1,0	-1,0	54,05	55,1538
5	-1,0	-1,0	1,0	41,85	41,7932
6	1,0	-1,0	1,0	60,66	61,4259
7	-1,0	1,0	1,0	28,43	28,453
8	1,0	1,0	1,0	42,86	44,1007
9	-1,68179	0,0	0,0	28,00	28,4729
10	1,68179	0,0	0,0	63,10	62,1463
11	0,0	-1,68179	0,0	63,30	62,8894
12	0,0	1,68179	0,0	37,00	35,9299
13	0,0	0,0	-1,68179	62,00	61,1876
14	0,0	0,0	1,68179	45,10	44,4317
15	0,0	0,0	0,0	50,50	50,409
16	0,0	0,0	0,0	50,50	50,409
17	0,0	0,0	0,0	50,00	50,409
18	0,0	0,0	0,0	50,80	50,409
19	0,0	0,0	0,0	50,10	50,409
20	0,0	0,0	0,0	50,30	50,409

Обробка результатів експерименту (табл. 6.10) дозволила отримати модель у вигляді рівняння регресії з врахуванням значущості коефіцієнтів:

$$C = 50,409 + 9,71388X_1 - 8,01511X_2 - 4,98155X_3 - 1,97968X_1^2 - 0,99625X_1X_2 - 0,89375X_1X_3 + 0,848756X_3^2 \quad (6.10)$$

Коефіцієнти моделі наведено в нормованому (кодованому) вигляді.

Значущість коефіцієнтів моделі визначали за допомогою Р – рівня і наведено на стандартизованому Парето-графіку (рис. 6.62). Вертикальна лінія на рисунку відповідає 95 % статистичній значущості коефіцієнтів.

Як видно з Парето-графіка, статистично значущими є коефіцієнти при лінійних членах рівняння регресії, коефіцієнти при X_1^2 та X_3^2 , та коефіцієнти при парних взаємодіях членів X_1 та X_2 , і X_1 та X_3 .

Значення коефіцієнтів регресії в рівнянні (6.10) визначають силу впливу відповідних факторів чи їх комбінацій на величину функції відгуку, а знак перед коефіцієнтом – характер цього впливу. Як бачимо, на вміст класу -0,044 мм у вихідному продукті найбільше впливають колова (окружна) швидкість ротора відцентрового млина та крупність вихідної руди. Але треба враховувати, що фактори X_1 та X_3 входять до рівняння у вигляді квадратичних членів, що призводить до зниження їх впливу на функцію відгуку при оцінці за величиною коефіцієнтів регресії.

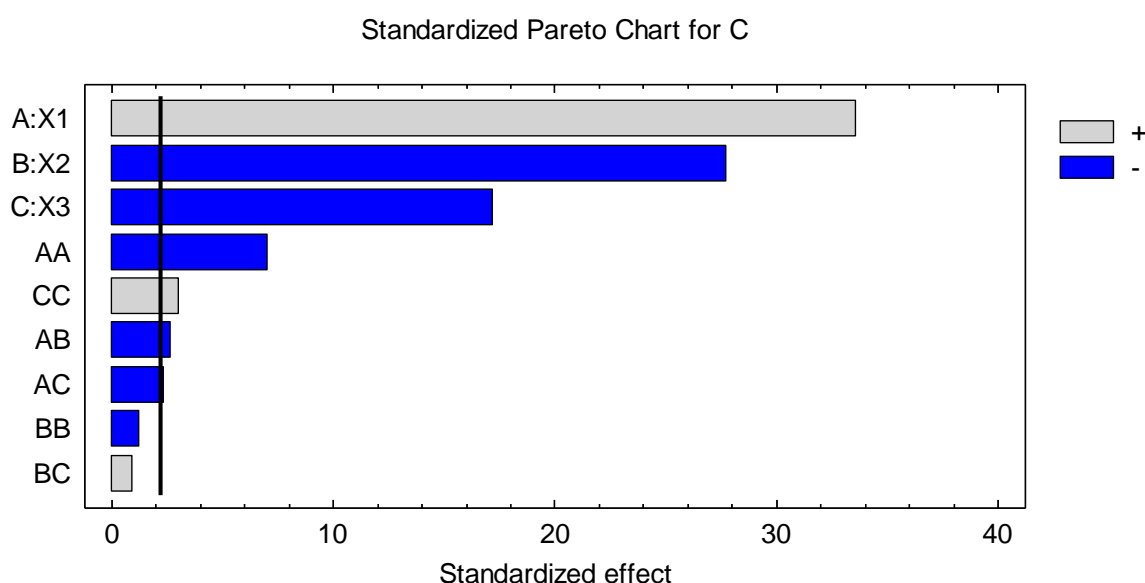


Рисунок 6.62 – Значущість коефіцієнтів моделі (Парето-графік).

Адекватність одержаних регресійних моделей визначили за високим значеннями коефіцієнту детермінації R-квадрат: $R^2 = 99,5 \%$.

Середньоквадратичне відхилення (стандартна похибка) $\sigma = 1,07 \%$; похибка моделі складає $\pm 2,12 \%$.

Аналіз регресійної моделі здійснено за допомогою згаданої статистичної програми «Statgraphics 5.1 Plus».

На рис. 6.63 наведено тривимірні поверхні відгуку та їх перетини. Аналіз залежностей, наведених на рис. 6.63, показує, що зростання окружної швидкості прискорювача відцентрового млина призводить до помітного зростання вмісту класу $-0,044$ мм у вихідному продукті дроблення. Зростання вмісту класу дещо уповільнюється при зміні окружної швидкості прискорювача від 80 до 85-87 м/с. Швидкість 85-87 м/с можна вважати оптимальною для цієї моделі млина відцентрово-ударної дії.

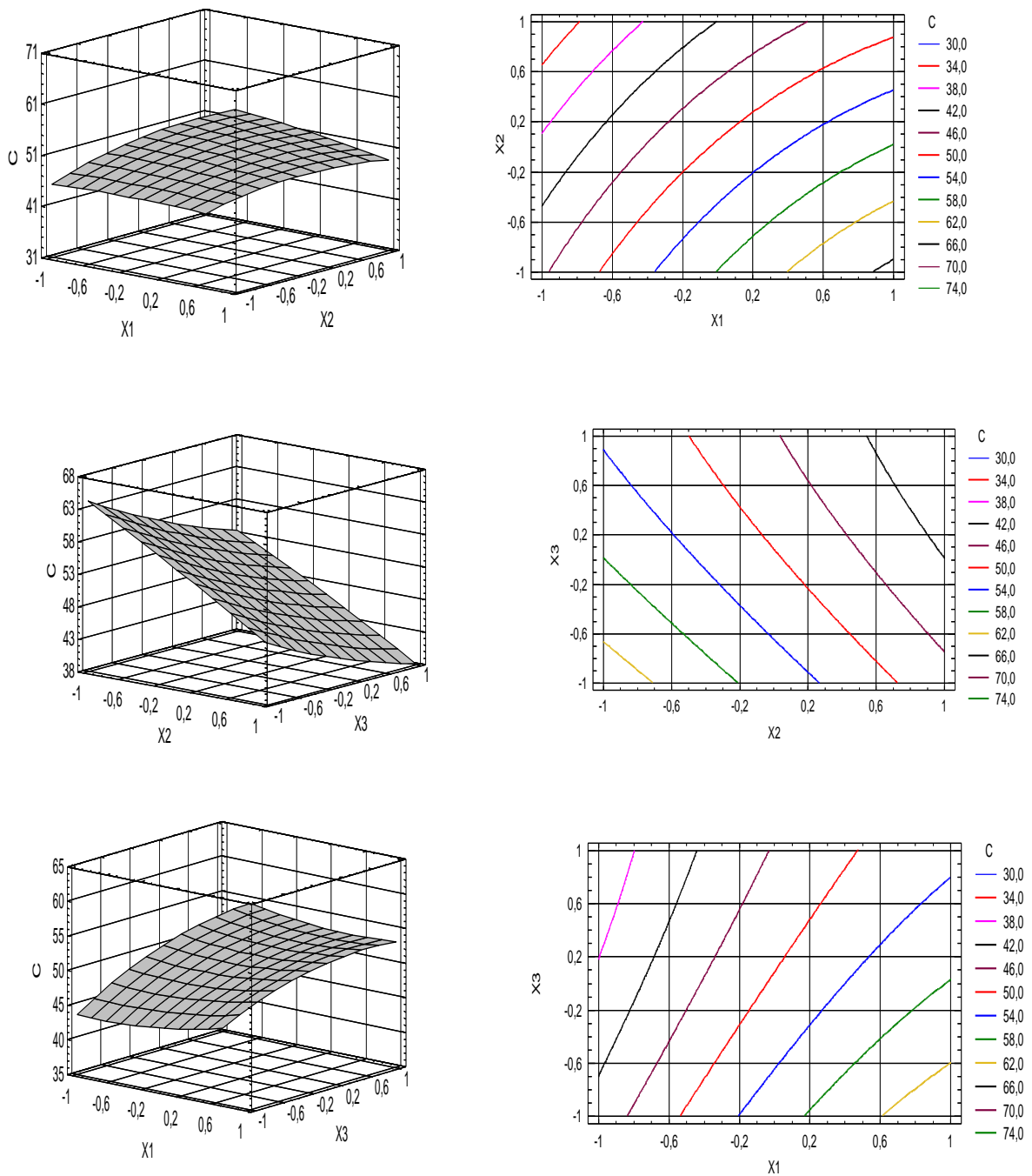


Рисунок 6.63 – Тривимірні поверхні відгуку та їх перетини.

Зростання крупності вихідної руди, що подається на подрібнення, приводить до зниження вмісту класу – 0,044 мм. Найвищий вміст цього класу спостерігається при подрібненні дрібної руди крупністю 6-4 мм.

Зростання навантаження на відцентровий млин по вихідній руді також призводить до зниження вмісту класу -0,044 мм у готовому продукті.

Оптимальним за цим критерієм навантаженням треба прийняти 1100-1200 кг/год.

Таким чином, при ударно-відцентровому подрібненні, яке є оптимальним способом рудопідготовки рідкіснометалічної руди Мазурівського родовища з точки зору мінімізації втрат цінного компоненту – ніобію, з шламами, та розкриття мінералів, відбувається вибіркове руйнування як рудних, так і нерудних (альбіту, мікрокліну, нефеліну) мінералів.

Розкриття протікає в більш грубому класі – 0,08-0,071 мм. Це сприятиме зростанню показників гравітаційного збагачення. Вихід «технологічного» (найбільш розкритого) класу при цьому суттєво вищий.

Раціональними технологічними параметрами млина ударно-відцентрової дії є: окружна швидкість ротора – 85-87 м/с, продуктивність по вихідній руді – 1100-1200 кг/год, крупність вихідної руди – 4-6 мм.

6.2.7 Визначення раціонального складу композиційних реагентів-нафтопродуктів для інтенсивного зневоднення вугілля фільтруванням

Одним з методів підвищення ефективності механічного зневоднення дрібнозернистого вугілля є застосування реагентів-інтенсифікаторів: неорганічних електролітів, синтетичних і натуральних поверхнево-активних речовин (ПАР), полімерів, аполярних органічних рідин [41, 49, 63]. На нашу думку, застосуванню останніх в нашій країні не приділяється достатньої уваги. Промислові випробування показують, що аполярні реагенти нафтового походження забезпечують зниження вологості осаду на 5% при витраті реагенту до 500 г/т. У разі використання кам'яновугільних масел досягається зниження вологості осаду на 3% при витраті реагенту 1-1,5 кг/т. При цьому продуктивність вакуум-фільтрів зростає в середньому на 10% [41].

У зарубіжній практиці як гідрофобізуючу добавку до вугілля перед центрифугуванням застосовують водну емульсію бітуму або важкої нафти

при співвідношенні реагент / вода = 30/70 - так звану «оріемульсію» (Orimulsion). Департамент енергетики США розробив спеціальний процес зневоднення Granuflo^w [64]. При крупності вугілля -0,6 мм; -0,2 мм; -0,1 мм; -0,075 мм і витраті емульсії 2-8% від маси вугілля зниження вологості кеку по відношенню до звичайного центрифугування відповідно склало 37%, 32%, 26%, 26% [65]. Наведені дані свідчать про помилковість висновків ряду вітчизняних досліджень щодо низької ефективності аполярних реагентів для інтенсифікації зневоднення тонких класів вугілля. У зв'язку з цим виникає необхідність в розробці теоретичних основ вітчизняної технології інтенсифікації зневоднення вугілля аполярними реагентами. Ефективність застосування аполярних реагентів багато в чому залежить від їх групового хімічного складу. Однак дослідження цього параметра носять випадковий, несистемний характер і не можуть дати чітких теоретичних уявлень і практичних рекомендацій щодо раціонального складу цих реагентів.

Метою цієї роботи є визначення раціонального складу реагенту-інтенсифікатора процесу зневоднення вугілля різного ступеня зрілості (вуглефікації) вакуумним фільтруванням на основі продуктів нафтового походження. Ці реагенти широко застосовуються в практиці вуглезбагачення і на відміну від продуктів коксохімії в разі оптимального дозування істотно не впливають на організм людини і навколишнє середовище. Подібні дослідження найбільш доцільно проводити методами симплекс-решітчастого або симплекс-центроїдного планування для систем "склад-властивість". У даній роботі використаний симплекс-центроїдний план Шеффе, що забезпечує рівномірний розкид експериментальних точок по факторному простору [66].

Суть досліджень полягала у визначенні впливу складу композиційного реагенту на вологість вугілля W після його зневоднення вакуумним фільтруванням. Дослідження проводилися на шламах розміром - 0,5 мм 3 марок донецького вугілля:

- марки ДГ (ш. Південно-Донбаська № 1), $A_u^d = 8,2 \%$;
- марки К (ш. ім. Гайового), $A_u^d = 7,9 \%$;
- марки П (ш. "Комсомолец Донбасу"), $A_u^d = 8,5 \%$.

Рівняння регресії розроблялися окремо для кожної марки вугілля.

В якості вихідних компонентів композиційного реагенту застосовувалися найбільш широко використовувані у вуглезбагаченні

реагенти-нафтопродукти: освітлювальний гас (X1), дизельне паливо (X2) і флотаційний реагент ААР-2 (X3). У всіх експериментах, що реалізують матрицю трикомпонентного симплекс-центроїдного плану, витримувалося умова $\sum_{i=1}^3 X_i = 1$, де X_i – частинна участь у реагенті i -го компонента.

Дослідження проводилися на лабораторній фільтрувальній установці при наступних значеннях параметрів фільтрування: величина вакууму 70 кПа; густина вихідної суспензії 200 кг/м³; час фільтрації 1 хв. Вихідна суспензія перед фільтруванням оброблялася композиційним реагентом у високошвидкісній імпеллерній мешалці при $n = 2500$ хв⁻¹. Витрата реагенту у всіх експериментах становила 500 г/т.

Розробка планів експериментів, оцінка значимості коефіцієнтів і адекватності регресійних моделей, а також аналіз отриманих рівнянь здійснювалися за допомогою модуля "Планування експерименту" програми Statgraphics 5.0 Plus.

Попередня оцінка показала, що серед пропонованих в модулі регресійних моделей сумішей (лінійної, квадратної, кубічної та спеціальної кубічної) найбільш високими статистичними характеристиками володіє спеціальна кубічна модель у вигляді наступного полінома:

$$W = b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Тому всі наступні розрахунки і оцінки здійснювалися на основі цієї моделі. У таблиці 6.11 наведені матриці планування, експериментальні і розрахункові (відповідно до моделі) значення цільової функції, а також основні статистичні оцінки рівнянь регресії. Як видно, всі регресійні моделі володіють надійними статистичними характеристиками. Про це свідчать високий рівень значущості ($p < 0,05$) і великі (понад 99%) значення коефіцієнта детермінації R^2 для всіх без винятку моделей. Це дозволяє вважати ці моделі адекватними досліджуваному процесу.

Отримані рівняння регресії для різних марок вугілля мають такий вигляд:

$$\text{ДГ: } W = 19,08 \cdot X_1 + 18,98 \cdot X_2 + 21,94 \cdot X_3 - 1,48 \cdot X_1 \cdot X_2 + 1,63 \cdot X_1 \cdot X_3 + 4,25 \cdot X_2 \cdot X_3 - 37,59 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$\text{К: } W = 22,11 \cdot X_1 + 19,48 \cdot X_2 + 21,02 \cdot X_3 - 2,02 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,65 \cdot X_1 \cdot X_3 - 3,00 \cdot X_2 \cdot X_3 - 15,25 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$\text{Т: } W = 21,01 \cdot X_1 + 20,61 \cdot X_2 + 19,47 \cdot X_3 - 1,15 \cdot X_1 \cdot X_2 + 2,56 \cdot X_1 \cdot X_3 - 3,44 \cdot X_2 \cdot X_3 - 20,54 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Таблиця 6.11 – Результати експериментів та оцінки моделей

Марка вугілля	Фактори (компоненти)			W, % експ.	W, % розрахунк.	Оцінки моделей	
	X ₁	X ₂	X ₃			рівень значимості (p-рівень)	коефіцієнт детермінації R ² , %
ДГ	1	0	0	19,1	19,08	0,0011	99,81
	0	1	0	19,0	18,98		
	0	0	1	21,9	21,94		
	0,5	0,5	0	18,7	18,66		
	0,5	0	0,5	20,9	29,91		
	0	0,5	0,5	21,5	21,52		
	0,333333	0,333333	0,333333	19,1	19,10		
	0,666667	0,166667	0,166667	18,9	18,98		
	0,166667	0,666667	0,166667	19,1	19,15		
	0,166667	0,166667	0,666667	21,0	20,89		
К	1	0	0	22,1	22,11	0,0010	99,90
	0	1	0	19,5	19,48		
	0	0	1	21,0	21,02		
	0,5	0,5	0	20,3	20,29		
	0,5	0	0,5	21,7	21,73		
	0	0,5	0,5	19,5	19,50		
	0,333333	0,333333	0,333333	19,8	19,82		
	0,666667	0,166667	0,166667	21,0	20,97		
	0,166667	0,666667	0,166667	19,3	19,35		
	0,166667	0,166667	0,666667	20,4	20,34		
П	1	0	0	21,0	21,01	0,0032	99,63
	0	1	0	20,6	20,61		
	0	0	1	19,5	19,47		
	0,5	0,5	0	20,5	20,53		
	0,5	0	0,5	20,9	20,89		
	0	0,5	0,5	19,2	19,18		
	0,333333	0,333333	0,333333	19,4	19,38		
	0,666667	0,166667	0,166667	20,4	20,37		
	0,166667	0,666667	0,166667	19,7	19,67		
	0,166667	0,166667	0,666667	19,3	19,41		

Для аналізу отриманих моделей були використані графічні можливості програми Statgraphics. На рисунку 6.64 представлені тернарні тривимірні графіки поверхонь відгуку, а також контурні криві (карти ліній рівня) цих поверхонь. Точками на картах ліній рівня показані оптимальні поєднання компонентів, що забезпечують мінімальні значення вологості кеку.

На основі представлених графіків виконаємо оцінку впливу складу композиційних реагентів на вологість кеку.

При обробці суспензії вугілля марки ДГ однокомпонентними (індивідуальними) реагентами їх ефективність зменшується в ряді "гас - дизпаливо - реагент ААР". Найбільш ефективними є двокомпонентні

суміші на основі газу і дизпалива при співвідношенні компонентів близько 50:50. У разі трикомпонентної суміші оптимальне співвідношення становить: $X_1 = 47\%$; $X_2 = 43\%$; $X_3 = 10\%$. При цьому вологість кеку мінімальна і досягає 18,5%.

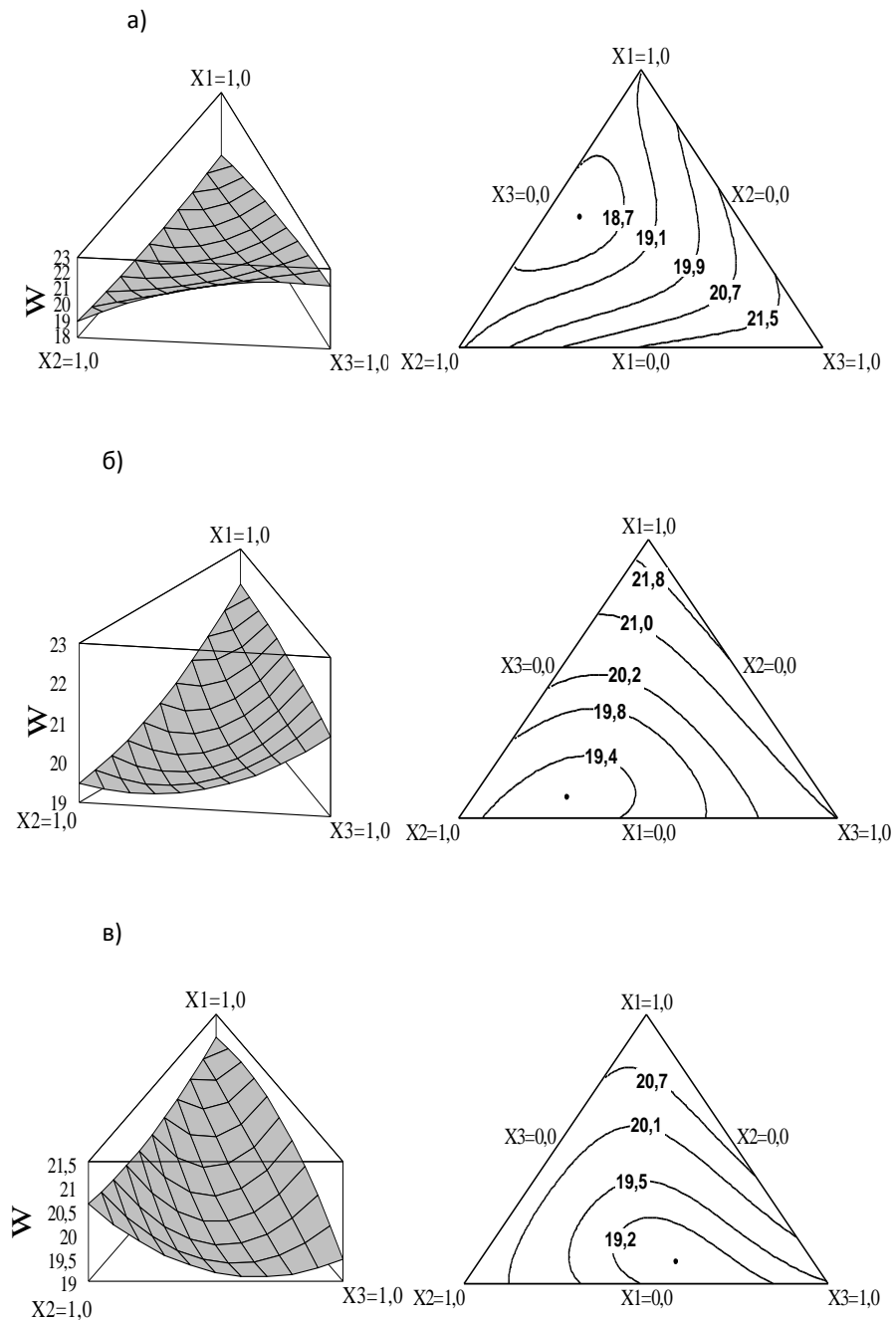


Рисунок 6.64 – Тернарні графіки поверхонь відгуку та їх контурні криві:
а – вугілля марки Д; б – вугілля марки К; в – вугілля марки П.

При обробці реагентами-інтенсифікаторами суспензії вугілля марки К ефективність індивідуальних реагентів зменшується в ряді "дизпаливо - реагент ААР - гас". Мінімальна вологість кеку ($W = 19,3\%$) досягається на трикомпонентній суміші наступного складу: $X_1 = 7\%$; $X_2 = 68\%$; $X_3 = 25\%$.

У разі обробки суспензії вугілля марки П посилюється зневоднююча дія реагенту ААР, який за своєю ефективністю починає перевершувати дизпаливо. У цьому випадку мінімальна вологість кеку ($W = 19,1\%$) досягається на суміші наступного складу: $X_1 = 8\%$; $X_2 = 38\%$; $X_3 = 54\%$.

В цілому дослідження показують, що гас є найбільш ефективним реагентом-інтенсифікатором в разі переробки малометаморфізованого вугілля. У міру збільшення ступеня хімічної зрілості вугілля зростає інтенсифікуючий вплив на процес його зневоднення фільтруванням дизпалива і реагенту ААР. При цьому участь в композиційному реагенті гасу не повинна перевищувати 7-8%.

Аналіз групового хімічного складу і властивостей цих реагентів показує [67], що в тій же послідовності спостерігається закономірне збільшення густини, в'язкості, молекулярної маси інгредієнтів і вмісту ароматичних сполук. Отже, підвищення кожного з цих показників веде до збільшення зневоднюючого впливу реагенту.

6.2.8 Процес масляної грануляції бурого вугілля

Буре вугілля займає важливе місце в паливно-енергетичному балансі України – його частка складає 6,6%. В нашій країні зосереджено 3,5% світових запасів бурого вугілля. Його можна використовувати як сировину у процесах брикетування, зрідження, газифікації, піролізу. [67] Водночас воно має ряд специфічних властивостей, які перешкоджають його масштабному використанню: висока вологість і гігроскопічність, висока реактивна здатність до кисню, дещо занижена теплота згоряння. Ці характеристики обумовлюють неможливість його тривалого зберігання, перевезення на великі відстані, велику імовірність самозаймання.

Актуальним також є питання переробки і облагородження бурого вугілля при його гідротранспортуванні. Існує дві принципово різні технології гідралічного транспортування вугілля. Перша технологія – транспортування у гідросумішах масовою концентрацією $C \approx 50\%$ з подальшим зневодненням на приймальному терміналі. Друга технологія гідралічного транспортування вугілля – у вигляді висококонцентрованих водо-вугільних суспензій (ВВВС). [68]

Таким чином існує проблема розробки такої технології первинної переробки бурого вугілля, яка б враховувала специфічні властивості вихідного бурого вугілля, умови процесу гідравлічного транспортування вугілля і вимоги до характеристик вугільної сировини подальших операцій по його переробці – піролізу, спалювання, зрідження, брикетування, зневоднення. Рішенням цієї проблеми може стати технологія обробки вугілля масляними реагентами – масляна агрегація.

У роботі [69] нами виконано попередні дослідження масляної агломерації (грануляції) бурого вугілля, що дало змогу встановити область раціональних режимних параметрів, вказати найбільш значимі з них – витрати зв'язуючого, рН середовища і його температура, швидкість обертання вала імпелера мішалки-гранулятора.

Для розробки регресійної моделі процесу масляної грануляції бурого вугілля використовується центрально-композиційний ротатбельний план другого порядку. Досліджувався вплив на процес масляної грануляції чотирьох головних факторів: витрати зв'язуючого $Q_{зв}$, температура середовища t_c , швидкість обертання вала імпелера мішалки-гранулятора n , показник рН середовища. Фактори та границі їх варіювання вибрані на основі даних [69] наведені в таблиці 6.12.

Таблиця 6.12 – Фактори, що впливають на процес масляної грануляції, та границі їх варіювання

Фактор	Код фактора	Одиниця вимірюван	Рівні факторів				
			-2	-1	0	+1	+2
Витрати зв'язуючого, $Q_{зв}$	X_1	мас.%	5	10	15	20	25
Температура середовища, t_c	X_2	°C	15	25	35	45	55
Швидкість обертання вала, n	X_3	хв ⁻¹	600	1000	1300	1600	1900
Показник рН середовища	X_4	-	5	6	7	8	9

Як вихідне прийняте буре вугілля крупністю 0-1 та 0-3 мм, зольністю $A^d = 10,65\%$, а як реагент зв'язуюче прийнято мазут марки М 100.

Експериментальна область факторного простору: $Q_{зв} = 5-25$ мас.% від вугілля, $t_c = 15-55$ °C, $n = 600-1900$ хв⁻¹, рН = 5-9. Цільова функція – діаметр гранул D . Для розробки плану експерименту та обробки одержаних експериментальних даних використовувалася стандартна комп'ютерна програма Statgraphics 5.1.

При розробці регресійної моделі процесу використано центрально-композиційний рототабельний план другого порядку, який забезпечує однакову похибку по всьому факторному простору [70, 71].

Одержаний поліном з урахуванням значущості коефіцієнтів моделі має вигляд:

$$D = 0,9 + 0,45 \cdot X_1 - 0,075 \cdot X_2 + 0,116667 \cdot X_3 - 0,25 \cdot X_4 + 0,24375 \cdot X_1^2 + 0,0 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,125 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,175 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0,10625 \cdot X_2^2 - 0,0875 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,0875 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0,01875 \cdot X_3^2 + 0,0125 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,11875 \cdot X_4^2$$

Коефіцієнти моделі наведено в нормованому вигляді. Модель адекватна процесу, що досліджується. Про це свідчить високе значення коефіцієнта детермінації ($R^2 = 97,9 \%$) і низьке значення стандартної похибки експерименту $SE = 0,143284$

На рис. 6.65 подано стандартизований парето-графік, згідно якого коефіцієнти при членах рівняння регресії X_1 , X_4 , X_1^2 , $X_1 \cdot X_4$, X_3 , $X_1 \cdot X_3$, X_4^2 , X_2^2 , X_2 , $X_2 \cdot X_3$, $X_2 \cdot X_4$ статистично значимі. Найбільше впливають на діаметр гранул витрати зв'язуючого X_1 , другий за значимістю фактор – рН середовища X_4 . Інші фактори впливають на цільову функцію значно менше. Збільшення факторів X_1 та X_2 , приводить до збільшення діаметра гранул, а збільшення факторів X_2, X_4 – до його зменшення.

На парето-графіку показано характер і ступінь впливу факторів та ефектів їх взаємодій на діаметр D .

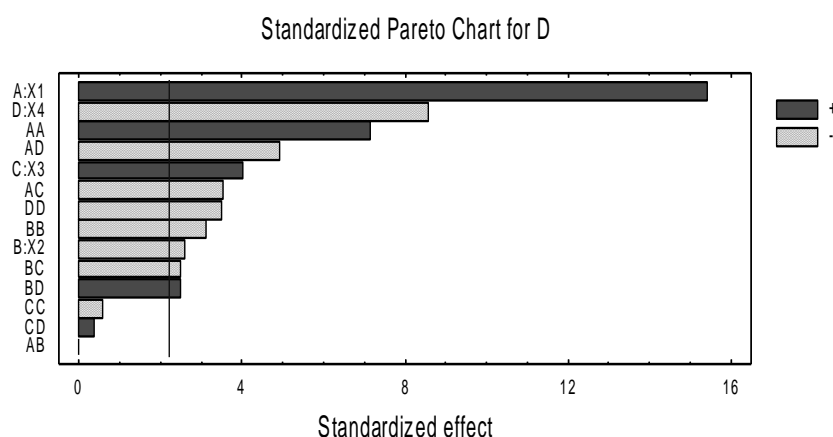


Рисунок 6.65 – Значимість коефіцієнтів моделі (парето-графік)

На рис. 6.66 зображений графік порівняння експериментальних (observed) і розрахункових (predicted) значень цільової функції. Як бачимо, в більшості випадків різниця між цими даними невелика. Більшість експериментальних точок знаходиться поблизу прямої лінії.

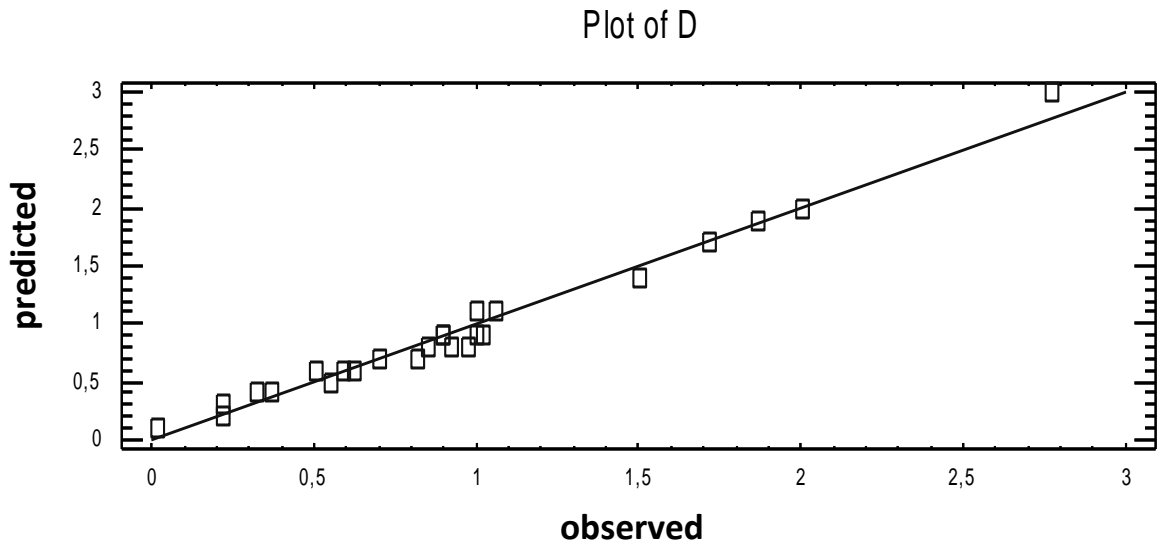


Рисунок 6.66 – Графік порівняння експериментальних (observed) і розрахункових (predicted) значень цільової функції.

На рис. 6.67. подані часткові тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції $D(X_1, X_2)$ і $D(X_3, X_4)$.

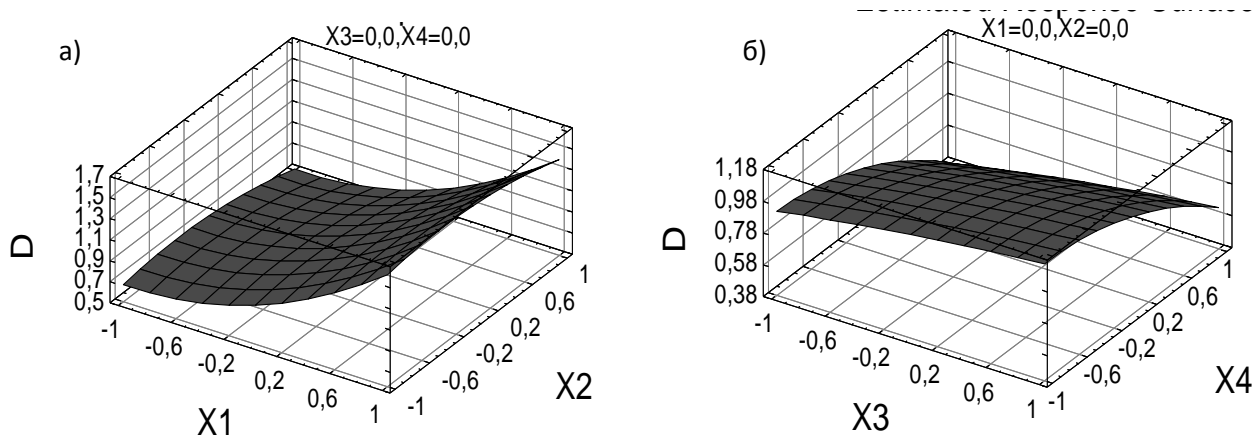


Рисунок 6.67 – Часткові тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції:
а) $D(X_1, X_2)$; б) $D(X_3, X_4)$

На рис. 6.68 наведені контурні криві цих гіперповерхонь. Простежується чітке збільшення діаметра D вуглемасляних агрегатів (гранул) з ростом витрат зв'язуючого в області $Q_{зв} = 5-25$ мас.%. При збільшенні $Q_{зв}$ з 10 до 20 мас.% діаметр D збільшується з 0,7 до 1,7 мм.

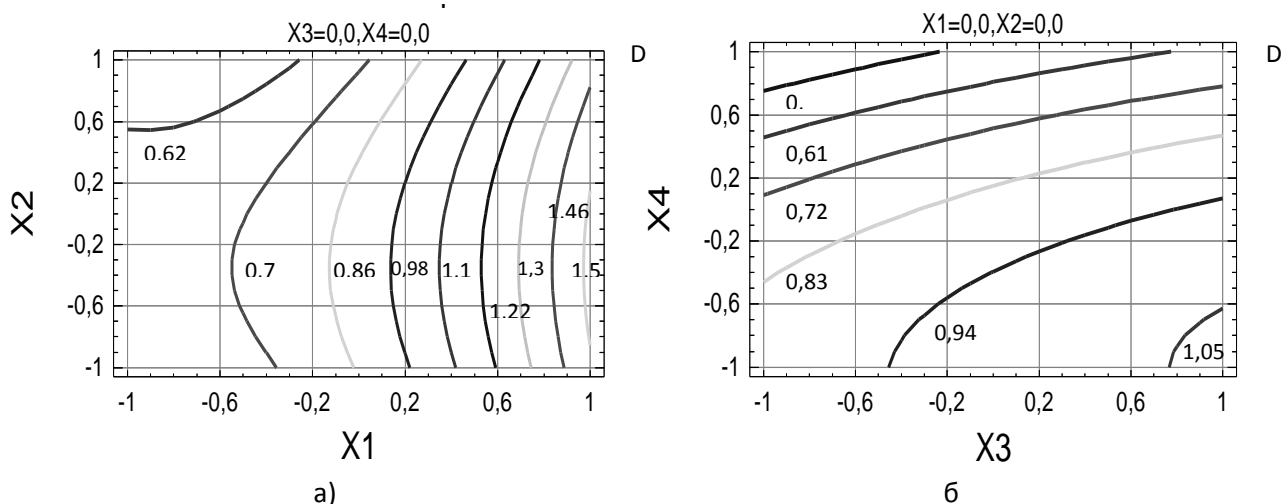


Рисунок 6.68 – Контурні криві гіперповерхонь:

а) $D(X_1, X_2)$; б) $D(X_3, X_4)$

Результати оптимізації показують, що максимальна крупність гранул складас $D = 3,6$ мм. Режимні параметри, які забезпечують досягнення такого результату у перерахування на натуральні значення факторів: $Q_{зв} = 25$ мас.%, $t_c = 22,5$ °C, $n = 1300$ хв⁻¹, pH = 5.

6.2.9 Визначення оптимального складу флокулянта на основі масляних реагентів

6.2.9.1 Визначення оптимального складу флокулянта на основі нафтопродуктів

Як відомо, груповий хімічний склад більшості масляних реагентів являє собою суміш різноманітних вуглеводних речовин, співвідношення між якими може коливатися в дуже широких межах [47, 66, 67]. Тому визначення раціонального складу масляних флокулянтів є актуальним питанням розробки промислової технології селективної флокуляції вугілля маслами.

Подібні дослідження найбільш доцільно проводити методами симплекс-решітчатого або симплекс-центроїдного планування для систем

“склад-властивість”. У даній роботі був використаний симплекс-центроїдний план Шеффе, що забезпечує рівномірний розкид експериментальних точок у багатомірному просторі [66].

Суть досліджень полягала у визначенні впливу складу композиційного флокулянта на показник вилучення вугільних фракцій у концентрат, ε . Цей параметр виступав як цільова функція і визначався з виразу:

$$\varepsilon = \frac{A_o^d - A_u^d}{A_o^d - A_k^d} \cdot \frac{100 - A_k^d}{100 - A_u^d} \cdot 100, \% \quad (6.11)$$

де A_o^d, A_k^d і A_u^d - зольності відходів, концентрату і вихідного вугілля відповідно.

Дослідження проводилися на шламах крупністю – 0,1 мм таких чотирьох марок донецького вугілля:

- марки Д (ш. Трудівська), довгополум'яне, $A_u^d = 34,2 \%$;
- марки Г (ш. Куйбишевська), газове, $A_u^d = 35,7 \%$;
- марки К (ш. ім. Леніна), коксівне, $A_u^d = 33,7 \%$;
- марки П (ш. “Комсомолец Донбасу”), пісне, $A_u^d = 35,1 \%$.

Рівняння регресії розроблялися окремо для кожної марки вугілля.

В першій серії експериментів (табл. 6.13) як вихідні компоненти композиційного флокулянта застосовувалися реагенти-нафтопродукти, що найбільш широко використовуються у вуглезбагаченні: освітлювальний гас (X_1), дизельне паливо (X_2) і флотаційний реагент ААР-2 (X_3). У всіх експериментах, що реалізують матрицю трикомпонентного симплекс-центроїдного плану, витримувалась умова $\sum_{i=1}^3 X_i = 1$, де X_i – пайова участь у

флокулянті i -го компонента. Витрати флокулянта у всіх дослідах складали 1% від маси вихідного шламу.

Дослідження проводилися на лабораторній установці, що включає високошвидкісний імпелерний змішувач з камерою обсягом 750 см³ і лабораторну флотомашину ФЛ-1 з таким же обсягом камери. Вихідна водовугільна суспензія густиною 150 кг/м³ оброблялася в змішувачі флокулянтном, склад якого відповідав необхідному згідно плану експерименту. Після турбулентного перемішування протягом 60 с при частоті $n = 2500 \text{ хв}^{-1}$ зфлокульований продукт піддавався наступному флотаційному поділу за рахунок аероефекту в камері флотомашини без

подачі додаткових реагентів. Продукти поділу висушувалися і піддавалися аналізу на зольність. За даними аналізів згідно рівняння (6.11) розраховувалися значення цільової функції – вилучення ϵ .

Таблиця 6.13 – Результати експериментів та оцінки моделей

Марка вугілля	Фактори (компоненти)			$\epsilon, \%$ експ.	$\epsilon, \%$ розрах.	Оцінки моделей	
	X_1	X_2	X_3			рівень значущості (р-рівень)	коефіцієнт детермінації $R^2 \%$
Д	1	0	0	89	89,34	0,0239	92,31
	0	1	0	85	84,80		
	0	0	1	83	82,52		
	0,5	0,5	0	83	83,09		
	0,5	0	0,5	82	81,81		
	0	0,5	0,5	80	79,27		
	0,333	0,333	0,333	81	80,00		
	0,6667	0,1667	0,1667	84	83,36		
	0,1667	0,6667	0,1667	80	80,99		
	0,1667	0,1667	0,6667	78	78,81		
Г	1	0	0	74	74,06	0,0090	98,57
	0	1	0	90	90,24		
	0	0	1	87	87,14		
	0,5	0,5	0	78	78,04		
	0,5	0	0,5	79	78,95		
	0	0,5	0,5	82	82,13		
	0,3333	0,3333	0,3333	77	78,33		
	0,6667	0,1667	0,1667	76	75,54		
	0,1667	0,6667	0,1667	83	82,10		
	0,1667	0,1667	0,6667	82	81,37		
К	1	0	0	74	73,59	0,0015	95,76
	0	1	0	82	82,41		
	0	0	1	87	87,13		
	0,5	0,5	0	78	77,98		
	0,5	0	0,5	79	78,71		
	0	0,5	0,5	89	89,52		
	0,3333	0,3333	0,3333	82	82,42		
	0,6667	0,1667	0,1667	76	77,10		
	0,1667	0,6667	0,1667	85	83,65		
	0,1667	0,1667	0,6667	86	85,47		
Т	1	0	0	72	72,68	0,0071	90,75
	0	1	0	77	77,32		
	0	0	1	90	89,86		
	0,5	0,5	0	77	76,52		
	0,5	0	0,5	87	86,06		
	0	0,5	0,5	89	87,70		
	0,3333	0,3333	0,3333	82	84,58		
	0,6667	0,1667	0,1667	81	79,58		
	0,1667	0,6667	0,1667	82	81,67		
	0,1667	0,1667	0,6667	88	89,03		

Розробка планів експериментів, оцінка значимості коефіцієнтів і адекватності регресійних моделей у цілому, а також аналіз отриманих рівнянь здійснювалися за допомогою модуля “Планування експерименту” програми Statgraphics Plus.

Попередня оцінка показала, що серед пропонованих у модулі регресійних моделей сумішей (лінійною, квадратичною, кубічною і спеціальною кубічною) найбільш високими статистичними характеристиками володіє модель другого порядку, що описується поліномом:

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i \neq j}^3 b_{ij} x_i x_j \quad (6.12)$$

Тому всі наступні розрахунки й оцінки здійснювалися на основі цієї моделі. У таблиці приведені матриці планування, експериментальні і розрахункові (відповідно до моделі) значення цільової функції, а також основні статистичні оцінки рівнянь регресії. Як видно, усі регресійні моделі статистично значимі. Про це свідчать високий рівень значимості ($p < 0,05$) і великі (понад 90 %) значення коефіцієнта детермінації R-квадрат для усіх без винятку моделей. Це дозволяє вважати ці моделі адекватними досліджуваному процесові.

Отримані остаточні рівняння регресії для різних марок вугілля мають такий вигляд:

$$\text{Д:} \quad \varepsilon = 89,34X_1 + 84,80X_2 + 82,53X_3 - 15,94X_1 \cdot X_2 - \\ - 16,48X_1 \cdot X_3 - 17,58X_2 \cdot X_3$$

$$\text{Г:} \quad \varepsilon = 74,06X_1 + 90,24X_2 + 87,15X_3 - 16,44X_1 \cdot X_2 - \\ - 6,63X_1 \cdot X_3 - 26,26X_2 \cdot X_3$$

$$\text{К:} \quad \varepsilon = 73,59X_1 + 82,41X_2 + 87,14X_3 - 0,07X_1 \cdot X_2 - \\ - 6,62X_1 \cdot X_3 + 19,02X_2 \cdot X_3$$

$$\text{П:} \quad \varepsilon = 72,68X_1 + 77,32X_2 + 89,86X_3 + 6,07X_1 \cdot X_2 + \\ + 19,16X_1 \cdot X_3 + 16,43X_2 \cdot X_3$$

Для аналізу отриманих моделей були використані графічні можливості програми Statgraphics. На рис. 6.69 представлені тернарні тривимірні графіки поверхонь відгуку, а на рис. 6.70 – контурні криві (карти ліній рівня) цих поверхонь. На основі представлених графіків виконаємо оцінку впливу складу композиційних реагентів на їх флокулюючу здатність.

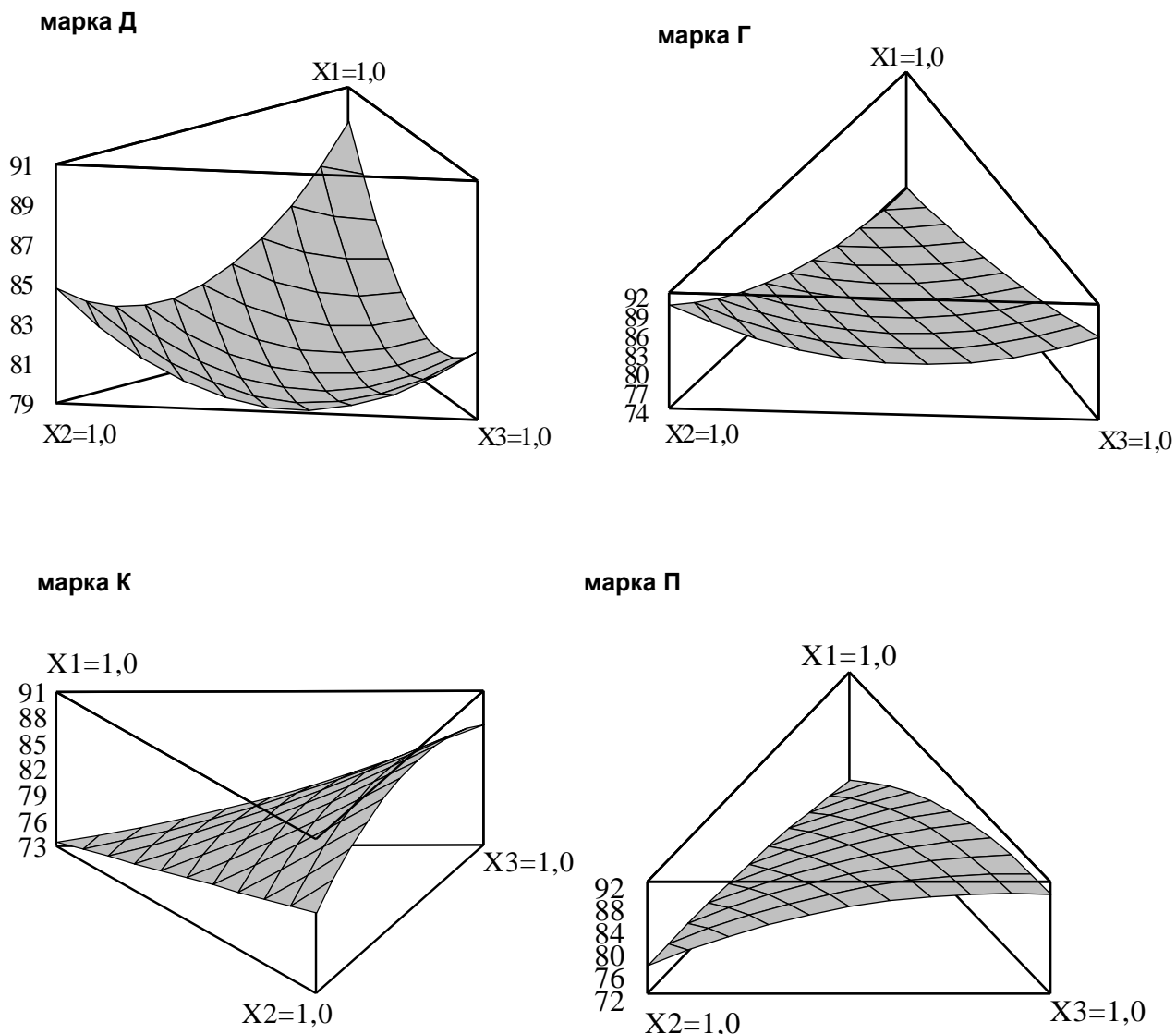


Рисунок 6.69 – Тернарні графіки поверхонь відгуку

У випадку флокуляції вугілля марки Д однокомпонентними (індивідуальними) реагентами їх флокулююча здатність знижується в ряді “гас – дизпаливо – реагент ААР”. Розрахунки по визначенню екстремума-максимума рівняння регресії показують, що максимальне значення вилучення досягається при $X_1 = 1,0$, тобто при використанні у якості флокулянта тільки гасу. Також можливе застосування двокомпонентного флокулянта на базі гасу з невеликою добавкою (не більш 10-12 %) дизельного палива. Трикомпонентні суміші у випадку флокуляції вугілля марки Д малоефективні.

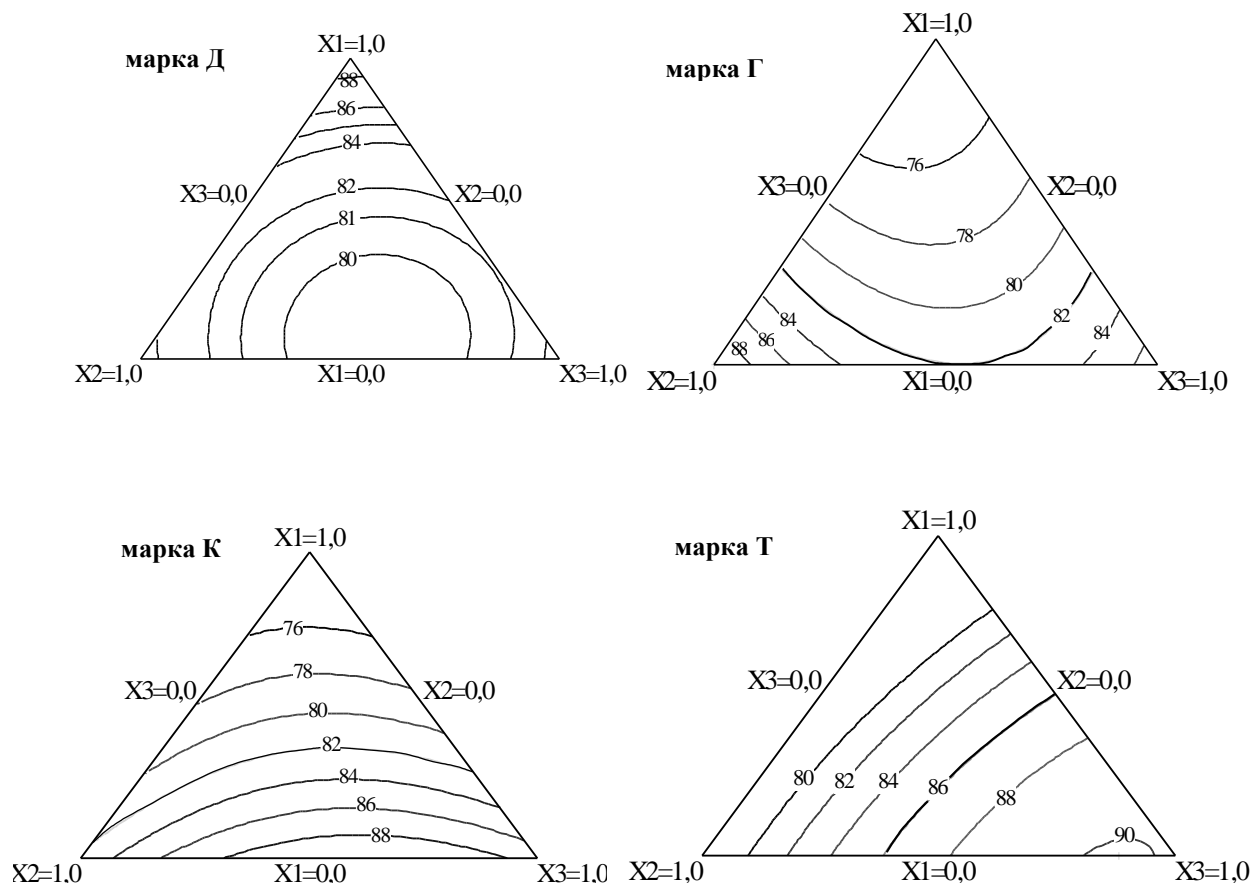


Рисунок 6.70 – Контурні криві поверхонь відгуку

При обробці вугілля марки Г флокулююча здатність індивідуальних реагентів зменшується в ряді “дизпаливо – реагент ААР – гас”. Цільова функція досягає максимальних значень при $X_2 = 1,0$. Двокомпонентні суміші ефективні тільки на основі дизпалива при пайовій участі реагенту ААР у межах 0 – 10 %. Як і в попередньому випадку, флокуляція вугілля марки Г трикомпонентними сумішами малоефективна.

При селективній флокуляції вугілля марок К і П ситуація істотно змінюється. Найбільш ефективними стають двокомпонентні суміші на основі дизпалива і реагенту ААР. У випадку вугілля марки К оптимальним є співвідношення: $X_2 = 38 \%$; $X_3 = 62 \%$. Для вугілля марки П маємо: $X_2 = 12 \%$; $X_3 = 88 \%$. Трикомпонентні суміші можливі на базі дизпалива і реагенту ААР з невеликою добавкою (до 10%) гасу.

У цілому аналіз показує, що гас є найбільш ефективним флокулянтном у випадку переробки вугілля малого ступеня вуглефікації. По мірі збільшення ступеня хімічної зрілості вугілля найбільш ефективним стає спочатку дизпаливо, а потім двокомпонентні суміші “дизпаливо -

реагент ААР”, з поступовим ростом частки реагенту ААР при переході від вугілля середнього до вугілля високого ступеня зрілості.

Звідси випливає, що флокулююча здатність розглянутих нафтопродуктів у міру збільшення ступеня хімічної зрілості вугілля зростає в ряді “гас - дизпаливо - реагент ААР”. Аналіз групового хімічного складу і властивостей цих реагентів показує [47], що в тій же послідовності спостерігається закономірне збільшення густини, в'язкості, молекулярної маси інгредієнтів і вмісту ароматичних сполук. Отже, підвищення кожного з цих показників веде до збільшення флокулюючої здатності реагентів.

Таким чином, флокулююча здатність реагентів-нафтопродуктів та їх композицій є функцією їх групового хімічного складу і властивостей. Вона зростає в міру збільшення густини, в'язкості, молекулярної маси індивідуальних сполук, а також вмісту ароматичних сполук.

Для вугілля низької стадії метаморфізму найбільш ефективними є індивідуальні флокулянти на основі гасу і дизпалива, а також їх композиції. У випадку вугілля середньої і високої стадії метаморфізму найбільш ефективні композиції дизпалива і флотореагента ААР.

6.2.9.2 Визначення оптимального складу флокулянта на основі продуктів коксохімії

Розглянемо тепер визначення оптимального складу масляних реагентів на основі продуктів переробки кам'яновугільної смоли коксохімічного виробництва. Як вихідні компоненти композиційного флокулянта в наших експериментах застосовувалися (табл.): вбирне масло (X_1), друга антраценова фракція (X_2) і пековий дистилят (X_3).

Дослідження виконувалися на тому ж вугіллі, на тій самій установці і при тих же режимних параметрах флокуляції, що і в попередній серії експериментів. Для розробки і аналізу рівнянь регресії також застосовувалася програма Statgraphics, в якості цільової функції – вилучення вугілля в концентрат ε (%).

Встановлено, що у випадку композиційних флокулянтів на основі продуктів коксохімії найбільш високими статистичними характеристиками володіє спеціальна кубічна модель у вигляді наступного полінома:

$$\varepsilon = b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Всі наступні розрахунки й оцінки здійснювалися на основі цієї моделі.

У таблиці 6.14 наведені матриці планування, експериментальні і розрахункові (відповідно до моделі) значення цільової функції, а також основні статистичні оцінки рівнянь регресії. Як видно, усі регресійні моделі володіють надійними статистичними характеристиками. Про це свідчать високий рівень значимості ($p < 0,05$) і великі (більш 90 %) значення коефіцієнта детермінації R-квадрат для усіх без винятку моделей. Це дозволяє вважати ці моделі адекватними досліджуваному процесові.

Отримані рівняння регресії для різних марок вугілля мають такий вигляд:

$$\text{марка Д: } \varepsilon = 91,1235 \cdot X_1 + 88,1962 \cdot X_2 + 80,9508 \cdot X_3 + 5,03952 \cdot X_1 \cdot X_2 + \\ + 6,94861 \cdot X_1 \cdot X_3 + 13,4941 \cdot X_2 \cdot X_3 - 4,76443 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$\text{марка Г: } \varepsilon = 88,4826 \cdot X_1 + 88,1008 \cdot X_2 + 80,9372 \cdot X_3 + 11,9668 \cdot X_1 \cdot X_2 + \\ + 12,8395 \cdot X_1 \cdot X_3 + 13,2759 \cdot X_2 \cdot X_3 - 13,7644 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$\text{марка К: } \varepsilon = 88,4178 \cdot X_1 + 90,836 \cdot X_2 + 80,836 \cdot X_3 + 4,50744 \cdot X_1 \cdot X_2 + \\ + 9,30744 \cdot X_1 \cdot X_3 + 7,3438 \cdot X_2 \cdot X_3 + 41,0827 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$\text{марка П: } \varepsilon = 88,3531 \cdot X_1 + 90,7712 \cdot X_2 + 80,9712 \cdot X_3 + 4,24861 \cdot X_1 \cdot X_2 + \\ + 17,4486 \cdot X_1 \cdot X_3 + 15,485 \cdot X_2 \cdot X_3 - 6,56441 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

На рис. 6.71 представлені тернарні тривимірні графіки поверхонь відгуку, а на рис. 6.72 – контурні криві (карти ліній рівня) цих поверхонь. На основі представлених графіків виконаємо оцінку впливу складу композиційних реагентів на їх флокулюючу здатність.

Як видно з рисунків та рівняння регресії, у випадку флокуляції вугілля марки Д однокомпонентними флокулянтами їх ефективність зростає в ряду “пековий дистилят (X_3) – друга антраценова фракція (X_2) – вбирне масло (X_1)”. Найбільш високою ефективністю володіють двокомпонентні суміші на основі вбирного масла і другої антраценової фракції. Оптимальний склад двокомпонентного флокулянта має таке співвідношення складових: $X_1 = 80 \%$, $X_2 = 20 \%$.

У випадку вугілля марки Г відзначені вище особливості в основному зберігаються. Але слід відмітити значне зростання частки другої антраценової фракції (X_2) в двокомпонентному флокулянті. В цьому разі оптимальний склад флокулянта такий: $X_1 = 52 \%$, $X_2 = 48 \%$.

Таблиця 6.14 – Результати експериментів та оцінки моделей

Марка вугілля	Фактори (компоненти)			ε , % експ.	ε , % розн.	Оцінки моделей	
	X_1	X_2	X_3			рівень значущості (p-рівень)	коефіцієнт детермінації R^2 , %
Д	1	0	0	91,3	91,12	0,0042	99,02
	0	1	0	88,0	88,20		
	0	0	1	81,0	80,95		
	0,5	0,5	0	90,9	90,92		
	0,5	0	0,5	88,0	87,74		
	0	0,5	0,5	87,8	87,95		
	0,333	0,333	0,333	89,5	89,41		
	0,667	0,167	0,167	90,0	90,56		
	0,167	0,667	0,167	90,2	89,64		
	0,167	0,167	0,667	86,0	86,18		
Г	1	0	0	88,5	88,48	0,0005	99,77
	0	1	0	88,0	88,10		
	0	0	1	81,0	80,94		
	0,5	0,5	0	91,2	91,28		
	0,5	0	0,5	88,0	87,92		
	0	0,5	0,5	87,8	87,84		
	0,333	0,333	0,333	89,5	89,56		
	0,667	0,167	0,167	90,0	90,03		
	0,167	0,667	0,167	90,2	89,88		
	0,167	0,167	0,667	86,2	86,37		
К	1	0	0	88,3	88,42	0,0016	99,48
	0	1	0	90,8	90,84		
	0	0	1	81,0	80,84		
	0,5	0,5	0	90,6	90,57		
	0,5	0	0,5	87,0	86,95		
	0	0,5	0,5	87,8	87,67		
	0,333	0,333	0,333	90,6	90,57		
	0,667	0,167	0,167	90,4	90,06		
	0,167	0,667	0,167	91,2	91,10		
	0,167	0,167	0,667	86,0	86,50		
П	1	0	0	88,3	88,35	0,0001	99,94
	0	1	0	90,8	90,77		
	0	0	1	81,0	80,97		
	0,5	0,5	0	90,6	90,62		
	0,5	0	0,5	89,0	89,02		
	0	0,5	0,5	89,8	89,74		
	0,333	0,333	0,333	90,6	90,59		
	0,667	0,167	0,167	90,4	90,25		
	0,167	0,667	0,167	91,2	91,29		
	0,167	0,167	0,667	87,4	87,49		

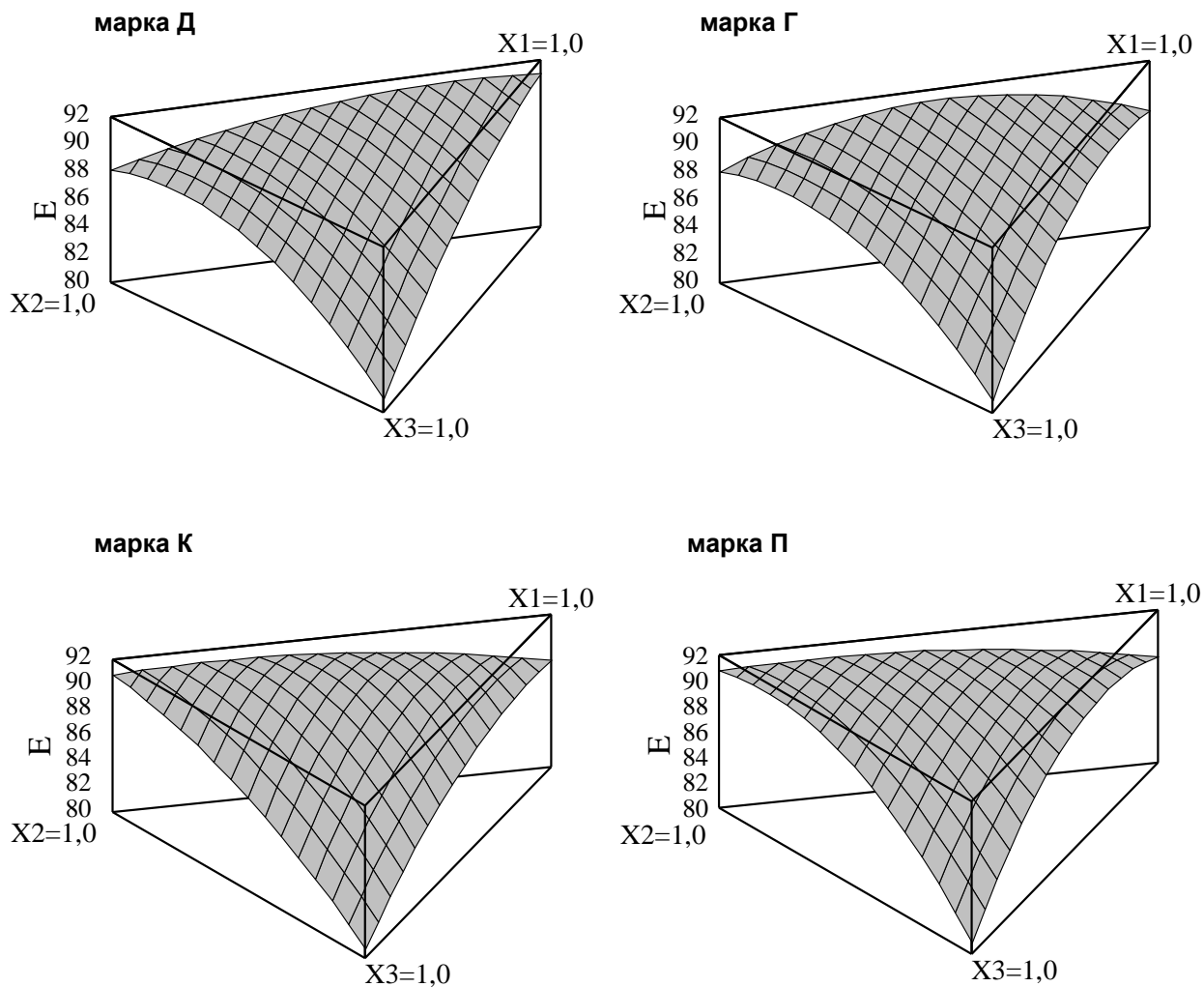


Рисунок 6.71 – Тернарні графіки поверхонь відгуку

При селективній флокуляції вугілля марки К однокомпонентними флокулянтами їх ефективність зростає в ряду “ пековий дистилят (X_3) - вбирне масло (X_1) - друга антраценова фракція (X_2) - ”. Таким чином, серед інших індивідуальних реагентів найбільш високу флокулюючу здатність на вугіллі К має друга антраценова фракція. В разі композиційних флокулянтів найбільш ефективна трикомпозиційна суміш такого складу: $X_1 = 33\%$; $X_2 = 54\%$; $X_3 = 13\%$.

Флокуляція індивідуальними і композиційними флокулянтами вугілля марки П (пісне) має ті ж самі тенденції, що і у випадку вугілля марки К – висока флокулююча здатність другої антраценової фракції, найбільша ефективність трикомпонентних флокулянтів. Оптимальний склад флокулянта такий: $X_1 = 8\%$; $X_2 = 75\%$; $X_3 = 17\%$. Особливістю в

даному випадку можна вважати зростання частки у композиційному флокулянті другої антраценової фракції та пекового дистилляту.

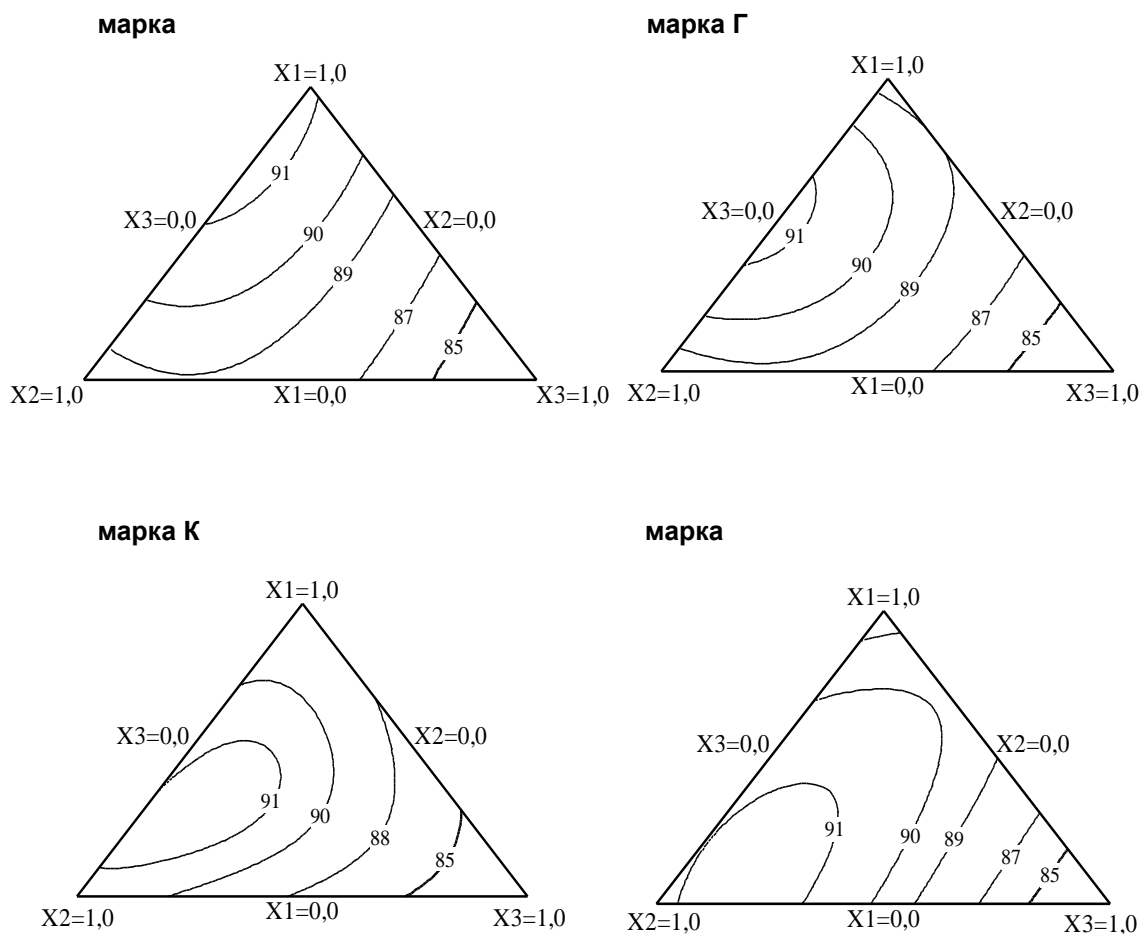


Рисунок 6.72 – Контурні криві поверхонь відгуку

Узагальнюючи одержані результати, можна зазначити такі особливості селективної флокуляції вугілля широкого метаморфічного ряду композиційними флокулянтами на основі коксохімічних продуктів. *По-перше*, у випадку флокуляції вугілля малого ступеня вуглефікації (марок Д і Г) найбільшою ефективністю володіють двокомпонентні реагенти на основі вбирного масла і другої антраценової фракції. *По-друге*, при флокуляції вугілля середньої і високої стадії вуглефікації найбільш ефективними стають трикомпонентні суміші з додатком пекового дистилляту.

В цілому слід відмітити, що по мірі зростання хімічної зрілості вугілля для його ефективної флокуляції потрібно знижувати частку в композиційному реагенті вбирного масла та поступово підвищувати частку другої антраценової фракції і пекового дистилляту. Для групового хімічного

складу цих реагентів характерне зростання ступеня ароматичності в такому ряді: - вбирне масло - друга антраценова фракція - пековий дистилят.

Очевидно, специфічні особливості будови ароматичних кілець (компланарність, ненасиченість С-С зв'язків) обумовлюють високу активність кам'яновугільних масел до вугільної поверхні. Ця активність набуває вирішального значення у випадку флокуляції більш хімічно зрілого вугілля, оскільки його структурна одиниця – макромолекула – також відрізняється максимальною ароматичністю за рахунок домінування ядерної частини над периферійною.

6.2.10 Процес селективної флокуляції вугілля маслами

Розробка промислової технології селективної флокуляції вугілля маслами вимагає попереднього глибокого дослідження характеру та ступеню впливу на процес найважливіших технологічних параметрів.

Ефективність селективної флокуляції маслами багато в чому визначається фізико-хімічними властивостями контактуючих фаз, гідродинамічними умовами перемішування. Попередні дослідження дозволили одержати апріорну інформацію про найбільш значимі технологічні параметри процесу. До них відносяться: витрати флокулянта, зольність вихідного матеріалу, інтенсивність і час перемішування, густина суспензії, витрати регулятора середовища (їдкого натру) [72]. Подальші дослідження характеру і ступеня впливу на процес зазначених параметрів здійснювалися на основі аналізу регресійних моделей процесу, отриманих за результатами активного факторного експерименту.

При розробці статистичної моделі процесу був реалізований симетричний некомпозиційний трьохрівневий план Бокса-Бенкена для шести факторів, що представляє собою сполучення дворівневого (-1,+1) повного факторного експерименту з неповноблочним збалансованим планом [66]. Ці плани по ряду статистичних характеристик перевершують широко застосовувані в даний час центрально-композиційні ортогональні і ротатабельні плани. План Бокса-Бенкена для шести факторів включає 48 основних і 6 дослідів на нульовому рівні. Всього здійснено дві серії експериментів і відповідно одержано дві регресійні моделі – на шламах коксівного і шламах енергетичного вугілля.

Коксівне вугілля. У першій серії за вихідну сировину використовували шлами вугілля марки Ж мулонакопичувача ЦЗФ “Київська”. Дослідження проводилися на спеціальному лабораторному турбулізаторі з мішалкою лопатевого типу. Відділення концентрату від мінералізованої суспензії здійснювалося в камері лабораторної флотомашини. У якості флокулянта застосовувалася композиція із двох нафтопродуктів – дизельного палива та флотореагента ААР. Співвідношення між цими компонентами відповідало оптимальному:

дизельне паливо – 38 %;

флотореагент ААР – 62 %.

В якості цільової функції було обрано показник вилучення вугільних фракцій в концентрат, ε (%).

Фактори і рівні їхнього варіювання представлені в таблиці 6.15.

Таблиця 6.15 – Фактори і рівні їх варіювання

Фактори	Код	Один. виміру	Інтервал варіювання	Рівні факторів		
				нижній рівень -1	основний рівень 0	верхній рівень +1
Витрати флокулянта	X ₁	%	0,5	0,5	1,0	1,5
Зольність вихідного шламу	X ₂	%	10	30	40	50
Окружна швидкість імелера	X ₃	м/с	1,6	1,6	3,2	4,8
Час флокуляції	X ₄	с	30	30	60	90
Густина суспензії	X ₅	кг/м ³	50	50	100	150
Витрати їдкового натру	X ₆	%	0,01	0	0,01	0,02

Умови експериментів були обрані на основі апріорної інформації про процес, що дозволило визначити координати центра експерименту в багатофакторному просторі у відносній близькості від області оптимуму (максимуму).

Розробка і аналіз регресійної моделі здійснювалися з використанням статистичного модуля “Планування експерименту” програми Statgraphics Plus.

Як видно з парето-графіка, що наведений на рис.6.73 а, статистично значимими є більшість коефіцієнтів за винятком коефіцієнтів при парних взаємодіях X_3X_5 , X_5X_6 та квадратичних членах рівняння регресії X_3^2 , X_4^2 і X_6^2 .

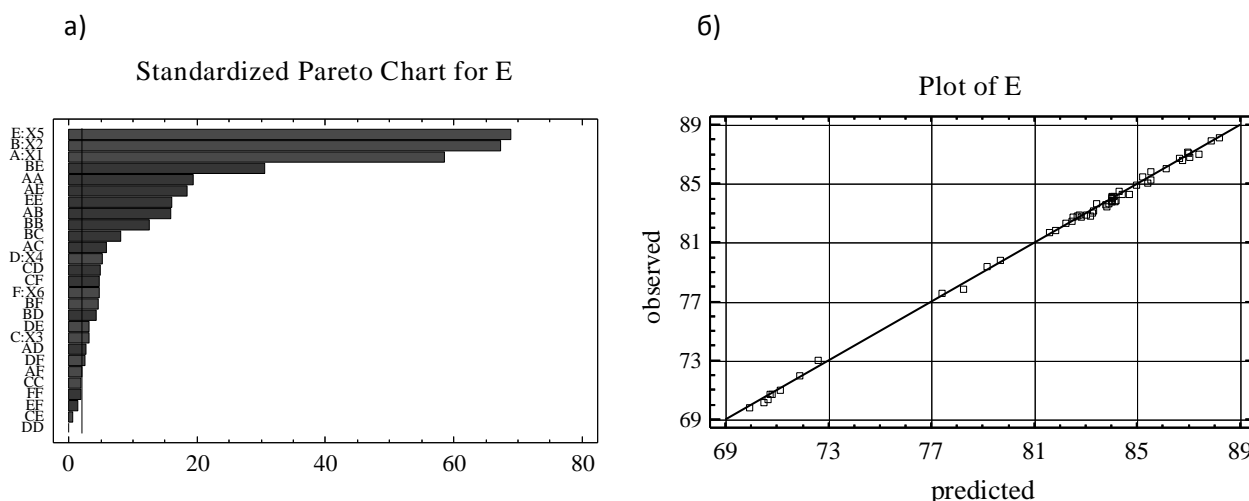


Рис. 1 Статистичні оцінки регресійної моделі (шлам марки Ж):
а – парето-графік (вертикальна лінія відповідає 95 % значущості коефіцієнтів);
б – графік порівняння експериментальних (observed) і розрахункових (predicted) значень цільової функції.

З урахуванням значимості коефіцієнтів рівняння регресії має вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 83,9867 + 3,58125 \cdot X_1 + 4,12375 \cdot X_2 + 0,180833 \cdot X_3 + \\ & + 0,309583 \cdot X_4 + 4,21417 \cdot X_5 + 0,280417 \cdot X_6 - 1,80181 \cdot X_1^2 - \\ & - 1,6675 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,61 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,184375 \cdot X_1 \cdot X_4 - 1,95125 \cdot X_1 \cdot X_5 + \\ & + 0,205 \cdot X_1 \cdot X_6 - 1,16556 \cdot X_2^2 - 0,8475 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,44 \cdot X_2 \cdot X_4 - \\ & - 2,28313 \cdot X_2 \cdot X_5 + 0,47625 \cdot X_2 \cdot X_6 - 0,5025 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,345 \cdot X_3 \cdot X_6 + \\ & + 0,32625 \cdot X_4 \cdot X_5 + 0,25 \cdot X_4 \cdot X_6 - 1,48931 \cdot X_5^2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Високе значення коефіцієнта детермінації ($R^2 = 99,8308 \%$) свідчить про адекватність отриманої регресійної моделі досліджуваному процесові. На рис. 1б проілюстровано порівняння одержаних (observed) і розрахункових (predicted) даних. Як видно, у більшості випадків різниця

між цими даними невелика. Значна кількість експериментальних точок знаходяться в околиці прямої.

На рис. 6.74 представлені найбільш характерні часткові тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції та її контурні криві. Графіки булополучено при фіксації значень факторів на оптимальних рівнях. Точками на контурних кривих позначені координати оптимуму цільової функції у факторному просторі.

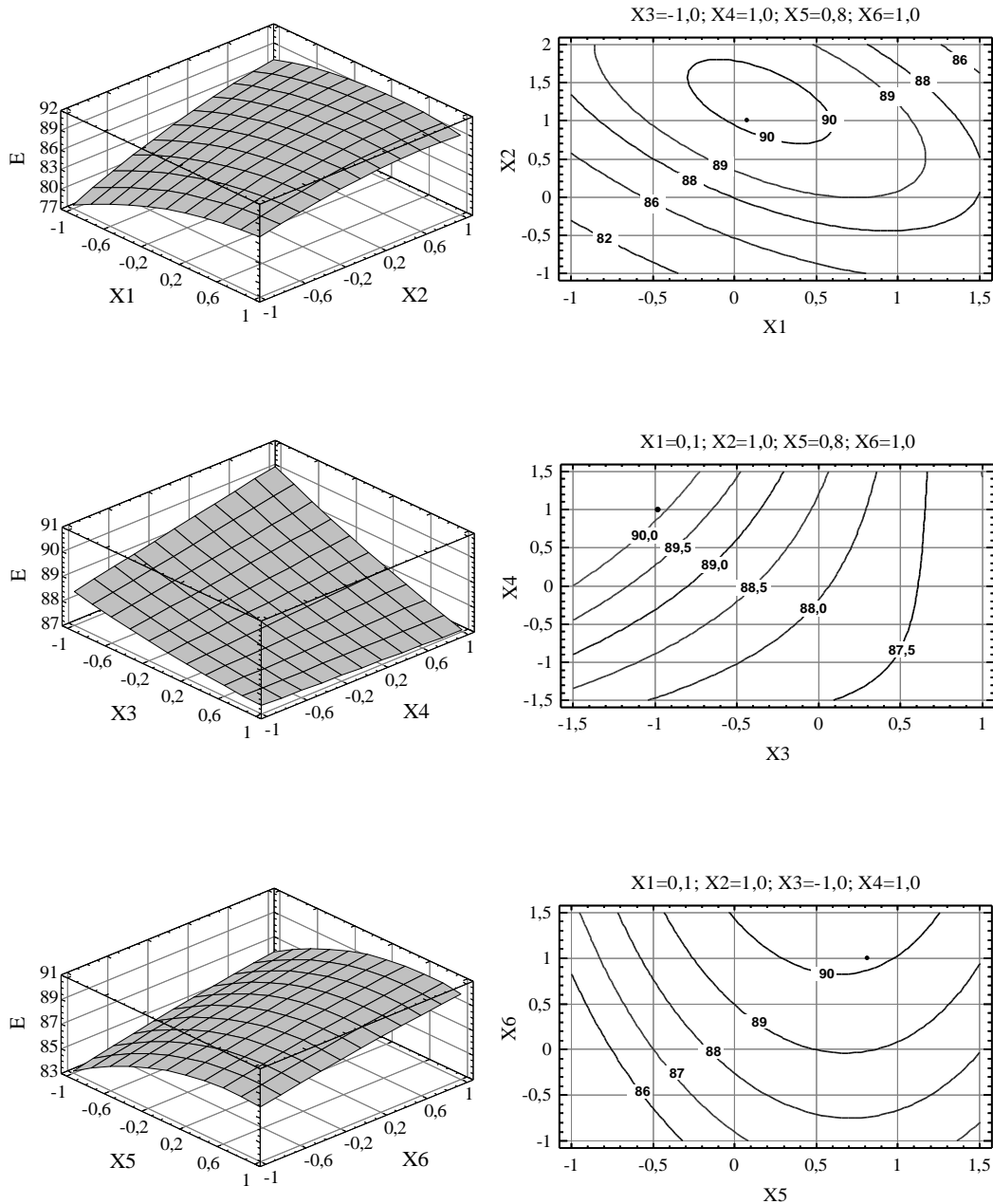


Рисунок 6.74 – Тривимірні перетини поверхні цільової функції та її контурні криві (шлам марки Ж)

Як видно з парето-графіка (див. рис. 6.73, а) і рівняння регресії (6.13), найбільш істотними факторами є густина вихідної суспензії (X_5), зольність шламів (X_2) та витрати масляного флокулянта (X_1). Збільшення кожного з них приводить до помітного росту вилучення вугільних фракцій в концентрат ε (див. рис. 6.74).

При цьому залежність $\varepsilon = f(X_1)$ є екстремальною при оптимальному значенні фактору $X_1 = 0,1$. В натуральному вираженні оптимальні витрати масляного флокулянта становлять 1,05 %. Також екстремальною є залежність $\varepsilon = f(X_5)$ з екстремумом-максимумом $X_1 = 0,8$ (140 кг/м³ в натуральному вираженні). Як видно з рис. 6.74, оптимальне значення зольності шламу складає $X_2 = 1,0$, або 50 % в натуральному масштабі.

З графіків залежностей $\varepsilon = f(X_3, X_4)$ витікає, що в рамках вибраного факторного простору зростання інтенсивності турбулентного перемішування (фактор X_3) призводить до помітного зменшення цільової функції ε . Це свідчить про можливість зниження окружної швидкості обертання імелера до мінімального значення $X_3 = -1,0$ (1,6 м/с). В цьому випадку зростання часу флокуляції X_4 до максимального значення $X_4 = 1,0$ (90 с) дозволяє значно підвищити вилучення ε . В той же час при максимальних значеннях параметра X_3 вплив фактора “час флокуляції” на цільову функцію майже відсутній. Отже, оптимальні значення факторів X_3 та X_4 відповідно становлять: $X_3 = -1,0$ (1,6 м/с); $X_4 = 1,0$ (90с).

Як показують попередні дослідження, ступінь впливу на процес витрат їдкого натру (X_6) може бути різним в залежності від мінерального складу досліджуваних шламів. У випадку масляної флокуляції вугільних шламів марки “Ж” ЦЗФ “Київська” зростання витрат їдкого натру до $X_6 = 1,0$ (0,02 %) дещо підвищує значення цільової функції ε .

Таким чином, при селективній флокуляції маслом вугільних шламів марки Ж у межах заданого в експерименті факторного простору екстремум-максимум цільової функції ε характеризується наступними оптимальними значеннями параметрів:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1,05 \% ; & X_2 &= 50 \% ; \\ X_3 &= 1,6 \text{ м/с} ; & X_4 &= 90 \text{ с} ; \\ X_5 &= 140 \text{ кг/м}^3 ; & X_6 &= 0,02 \% . \end{aligned}$$

Прогнозоване значення цільової функції в точці екстремуму складає $\varepsilon = 90,0841$ %. В результаті реалізації дослідів в точці екстремуму вилучення вугілля в концентрат складало 90,21 %. Близькість

експериментальних і розрахункових значень цільової функції в точці екстремуму є ще одним підтвердженням адекватності отриманого рівняння регресії.

Енергетичне вугілля. Аналогічні дослідження проведенні на шламах енергетичного вугілля. В якості об'єкту масляної селекції було обрано вугільні шлами марки Д мулонакопичувача ЦЗФ “Україна”. Експерименти здійснювалися на тій же самій лабораторній установці, що і в попередніх дослідженнях. Фактори та область їх варіювання також відповідали даним, наведеним в табл. 6.15. В якості цільової функції також було прийняте вилучення вугільних фракцій в концентрат, ε .

Відмінність полягала в тому, що у якості флокулянта застосовувався освітлювальний гас, який забезпечує максимальну ефективність процесу на вугіллі низького ступеня вуглефікації [72].

Розробка і аналіз регресійної моделі здійснювалися з використанням того ж статистичного модуля “Планування експерименту” програми Statgraphics Plus.

Як видно з парето-графіка, що наведений на рис. 6.75, статистично значимими є більшість коефіцієнтів за винятком коефіцієнтів при парних взаємодіях X_1X_5 , X_1X_6 , X_1X_6 та X_4X_5 . З урахуванням значимості коефіцієнтів рівняння регресії має вигляд:

$$\begin{aligned}\varepsilon = & 72,545 + 6,75333 \cdot X_1 + 7,10958 \cdot X_2 + 1,52708 \cdot X_3 + 0,58125 \cdot X_4 + \\ & + 7,86458 \cdot X_5 + 1,63708 \cdot X_6 - 2,61861 \cdot X_1^2 - 1,08875 \cdot X_1 \cdot X_2 - \\ & - 1,425 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0,34125 \cdot X_1 \cdot X_4 - 1,69778 \cdot X_2^2 + 3,25 \cdot X_2 \cdot X_3 - \\ & - 0,67875 \cdot X_2 \cdot X_4 - 1,6325 \cdot X_2 \cdot X_5 + 0,555556 \cdot X_3^2 - 1,42375 \cdot X_3 \cdot X_4 - \\ & - 2,0725 \cdot X_3 \cdot X_5 + 0,963125 \cdot X_3 \cdot X_6 + 0,660139 \cdot X_4^2 - 1,63125 \cdot X_4 \cdot X_6 - \\ & - 2,49028 \cdot X_5^2 + 1,97 \cdot X_5 \cdot X_6 - 1,08444 \cdot X_6^2\end{aligned}$$

Високе значення коефіцієнта детермінації ($R^2 = 99,7721 \%$) свідчить про адекватність отриманої регресійної моделі досліджуваному процесові. На рис. 3.75, б проілюстровано порівняння одержаних (observed) і розрахункових (predicted) даних. Як видно, у більшості випадків різниця між цими даними невелика. Значна кількість експериментальних точок знаходяться в околиці прямої.

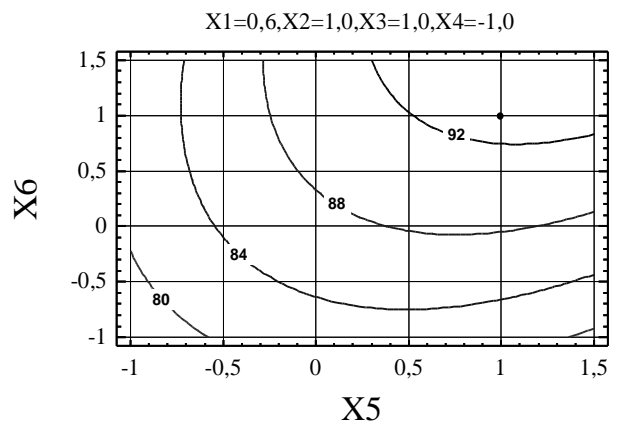
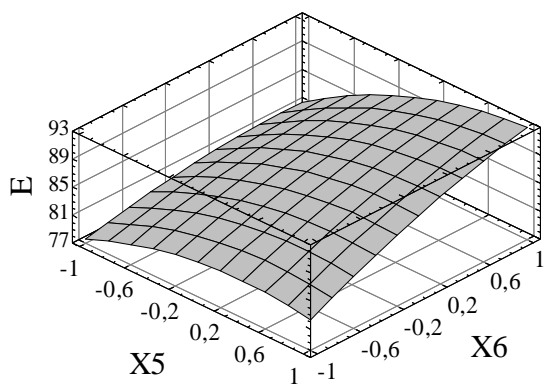
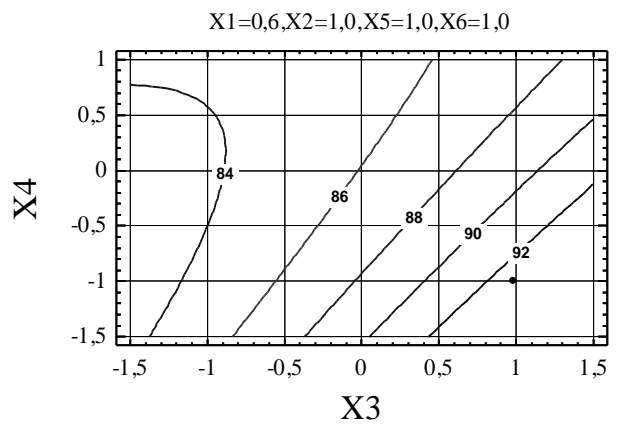
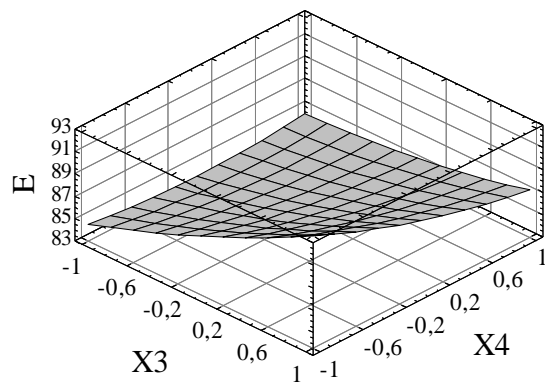
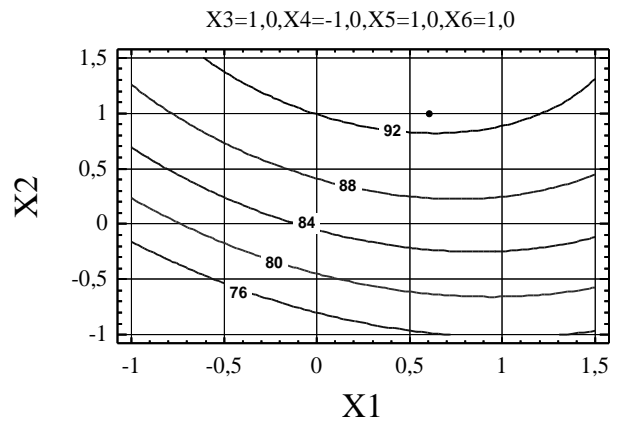
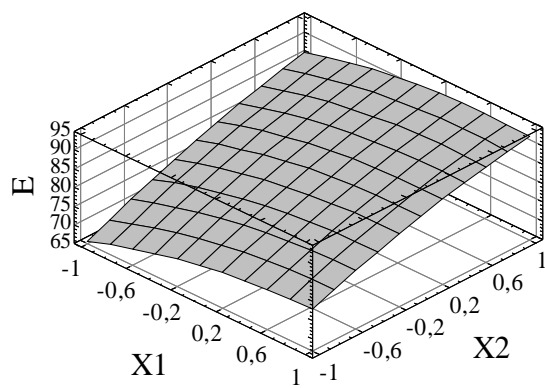


Рисунок 6.76 – Тривимірні перетини поверхні цільової функції та її контурні криві (шлам марки Д).

Екстремум-максимум цільової функції ε характеризується такими оптимальними значеннями досліджуваних факторів: $X_1 = 0,6$; $X_2 = 1,0$ %; $X_3 = 1,0$; $X_4 = -1,0$; $X_5 = 1,0$; $X_6 = 1,0$. В перерахунку на натуральні значення оптимальний режим селективної флокуляції вугілля марки Д має такі показники:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1,3 \text{ \%}; & X_2 &= 50 \text{ \%}; \\ X_3 &= 4,8 \text{ м/с}; & X_4 &= 30 \text{ с}; \\ X_5 &= 150 \text{ кг/м}^3; & X_6 &= 0,02 \text{ \%}. \end{aligned}$$

Прогнозоване згідно моделі значення цільової функції в точці екстремуму складає $\varepsilon = 92,7675$ %. В результаті реалізації досліду в точці екстремуму вилучення вугілля в концентрат складало 92,57 %. Близькість експериментальних і розрахункових значень цільової функції в точці екстремуму підтверджує адекватність отриманого рівняння регресії.

Таким чином, розроблені регресійні моделі адекватні вивчаємому процесу селективної флокуляції вугілля масляними реагентами. Вони дозволяють оцінити характер та ступінь впливу на процес флокуляції найважливіших технологічних параметрів. Незалежно від ступеня хімічної зрілості вугілля зростання його зольності та витрат реагента-регулятора рН середовища (їдкого натру) призводить до помітного підвищення вилучення вугільних фракцій в концентрат, ε .

Залежності вилучення ε від витрат масла та густини суспензії є екстремальними. Оптимальні значення витрат масляного флокулянту та густини суспензії складають 1,05 – 1,3 % і 140-150 кг/м³ відповідно.

Селективна флокуляція молодого вугілля потребує більш інтенсивного режиму перемішування водовугільної суспензії, ніж це потрібно при переробці більш зрілого вугілля. В першому випадку оптимальне значення окружної швидкості імпелера змішувача складає 4,8 м/с, в другому – 1,6 м/с.

Оптимальний час флокуляції маслами молодого вугілля складає 30 с. Подальше зростання тривалості флокуляції приводить до зменшення ефективності процесу, імовірно за рахунок механічного “захвату” у флокули мінеральних часток. В разі хімічно зрілого вугілля негативний вплив мінеральної компоненти зменшується і оптимальний час флокуляції складає біля 90 с.

Одержані результати доцільно використати при розробці дослідно-промислової технології селективної флокуляції вугільних шламів маслами.

6.2.11 Процес селективної флокуляції вугілля латексами

Селективна флокуляція латексами – складний, багатоступеневий процес, що визначається цілим рядом технологічних факторів. Аналіз показує, що основними вхідними та вихідними параметрами процесу є такі:

фізико-хімічні властивості (φ_s) та зольність (A_s^d) вугілля ;
густина (ρ_c), температура (T_c) і pH суспензії;
фізико-хімічні властивості (φ_n), концентрація (c_n) і витрати (Q_n) латексу ;

тривалість (τ_ϕ), інтенсивність (n_ϕ) турбулентного перемішування;

температура суспензії під час флокуляції (T_ϕ) ;

вихід (γ_k) та зольність (A_k^d) концентрату ;

вихід (γ_o) та зольність (A_o^d) відходів.

На основі апріорної інформації, одержаної з технічної літератури та попередніх досліджень [44], було визначено, що при застосуванні бутадієн-стирольних латексів у звичайних умовах збагачувальних фабрик найбільш важливими вхідними параметрами є витрати флокулянту, густина водовугільної суспензії, зольність вугілля та тривалість флокуляції. Для вивчення характеру та ступеня впливу цих факторів на процес флокуляції нами було розроблено математичну регресійну модель з використанням повного факторного експерименту типу 2^4 . При цьому реалізовано центрально-композиційний ротатбельний план другого порядку [8].

Дослідження проведені на шламах ЦЗФ “Київська”, яка переробляє вугілля марки Ж шахти ім. Засядько. Крупність шламу 0-0,5 мм, температура та pH суспензії 18-20 °С і 7,4 відповідно. Як флокулянт використано синтетичний латекс БС-30Ф. Селективна флокуляція здійснювалася у турбулізаторі-змішувачі, що представляв собою модернізовану лабораторну флотомашину з демонтованим статором й імпелерною мішалкою лопатевого типу з діаметром імпелера 60 мм, що має регульовану частоту обертання. Частота обертання імпелера змішувача при флокуляції складала 29 с⁻¹.

Відділення флокульованного продукту від мінералізованої суспензії проводилося в камері лабораторної флотомашини типу ФЛ-1 з обсягом камери 750 см³. Режим флотаційного поділу у всіх експериментах був постійним:

- витрати реагента-збирача (гасу) – 1200 г/т шламу;
- витрати реагента-вспінювача ("Оксаль") – 75 г/т шламу;
- час кондиціонування суспензії з реагентами – 30 с;
- частота обертання імелера – 1750 хв^{-1} ;
- питомі витрати повітря – $2 \text{ м}^3/(\text{год} \cdot \text{м}^2)$;
- час флотації – 2 хвилини.

Фактори та умови їх кодування наведені у табл. 6.16.

Таблиця 6.16 –Фактори та умови їх кодування

Фактори	Код фактору	Одини- ці виміру	Інтер- вал змін	Нижній рівень	Основ- ний рівень	Верх- ній рівень
Витрати латексу	X_1	г/т	40	80	120	160
Густина суспензії	X_2	г/л	40	80	120	160
Зольність вугілля	X_3	%	5	15	20	25
Тривалість флокуляції	X_4	с	20	40	60	80

Прийнятий факторний простір для параметрів X_2 і X_3 відповідає дійсним змінам цих факторів в умовах фабрик. Інтервали факторів X_1 і X_4 встановлено за апріорною інформацією.

Цільовою функцією прийнято вилучення вугільних фракцій у концентрат ε . Матрицю планування та значення цільової функції в експериментах наведено в табл. 6.17. Обробка та аналіз даних експерименту виконані на ПК з використанням статистичного програмного модулю Statgraphics. Як видно з парето-графіка, наведеного на рис. 6.77 а, статистично значимими є більшість коефіцієнтів моделі за винятком коефіцієнтів при парних взаємодіях X_1X_4 , X_2X_4 та X_2X_3 .

Одержане рівняння регресії з урахуванням значущості коефіцієнтів має вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 95,3286 + 0,204167 \cdot X_1 + 0,4625 \cdot X_2 - 0,1125 \cdot X_3 + \\ & + 0,0541667 \cdot X_4 + 0,260565 \cdot X_1^2 + 0,08125 \cdot X_1 \cdot X_2 + \\ & + 0,29375 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,0644345 \cdot X_2^2 + 0,185565 \cdot X_3^2 - \\ & 0,11875 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,198065 \cdot X_4^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Адекватність регресійної моделі підтверджується високим значенням коефіцієнту детермінації $R^2 = 98,15 \%$. На рис. 6.77 б, проілюстровано

порівняння одержаних (observed) і розрахункових (predicted) даних. Як видно, у більшості випадків різниця між цими даними невелика. Значна кількість експериментальних точок знаходяться в околиці прямої.

№	X_1	X_2	X_3	X_4	ε , %
1	0	0	0	0	95,4
2	0	0	0	0	95,3
3	0	0	0	0	95,4
4	0	0	0	0	95,2
5	0	0	0	0	95,2
6	0	0	0	0	95,3
7	0	0	0	0	95,4
8	-1	-1	-1	-1	95,5
9	1	-1	-1	-1	95,0
10	-1	1	-1	-1	96,6
11	1	1	-1	-1	97,2
12	-1	-1	1	-1	95,1
13	1	-1	1	-1	96,0
14	-1	1	1	-1	95,6
15	1	1	1	-1	96,9
16	-1	-1	-1	1	95,8
17	1	-1	-1	1	96,8
18	-1	1	-1	1	96,6
19	1	1	-1	1	96,6
20	-1	-1	1	1	94,5
21	1	-1	1	1	95,7
22	-1	1	1	1	95,7
23	1	1	1	1	96,8
24	-2	0	0	0	95,0
25	2	0	0	0	96,7
26	0	-2	0	0	93,6
27	0	2	0	0	96,0
28	0	0	-2	0	96,4
29	0	0	2	0	94,3
30	0	0	0	-2	95,0
31	0	0	0	2	95,4

Таблиця 6.17 – Матриця планування та результати експериментів

На рис. 6.77, а приведено тривимірні перетини гіперповерхні моделі, а на рис. 6.77, б – контурні криві цих поверхонь. Як видно з рівняння регресії та наведених графіків, зростання значень факторів X_1 , X_2 та X_4 приводить до відповідного росту функції відгуку ε . В той же час

підвищення зольності вугілля (X_3) супроводжується зниженням ε . Найбільш впливовими факторами є витрати латексу (X_1) та густина суспензії (X_2).

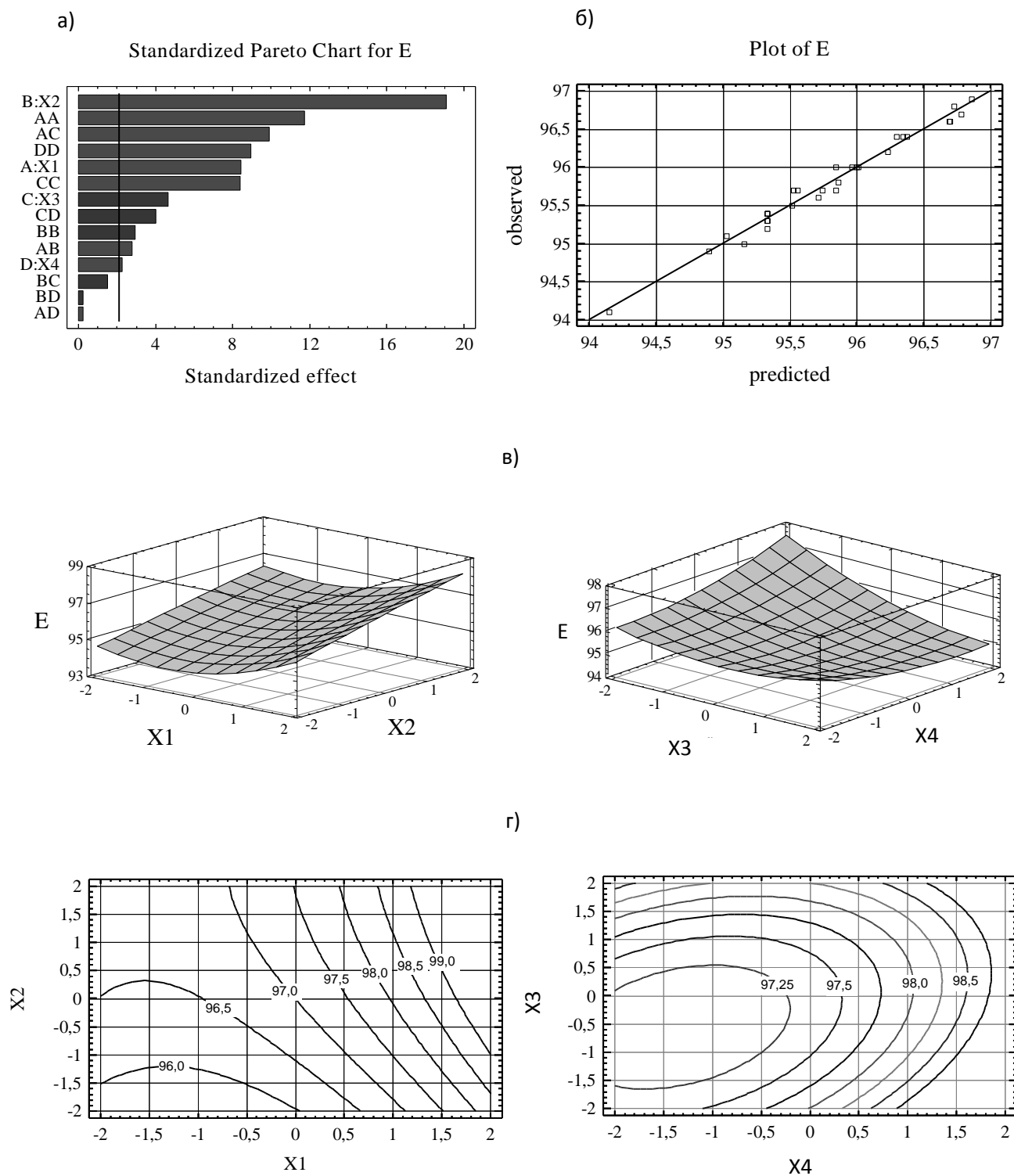


Рис. 1. Результати аналізу рівняння регресії (1):
а – парето-графік (вертикальна лінія відповідає 95% значущості коефіцієнтів моделі);
б – графік порівняння розрахункових (predicted) і експериментальних (observed) даних;
в – тривимірні перетини функції відгуку;
г – контурні криві поверхні відгуку.

Можна зробити висновок, що залежність $\varepsilon = f(Q_n)$ має екстремальний характер і підвищення витрат латексу в діапазоні 40-80 г/т приводить до деякого зниження ε . Це можна пояснити, якщо припустити, що в даному інтервалі витрат відстань між вугільними частинками, що зв'язані полімерними ланцюжками, не перевищує подвійного радіусу дії електростатичних сил відштовхування між ними. Як відзначалося, ці сили знижують міцність флокул. В результаті частина вугільних зерен відокремлюється від флокул, що супроводжується зменшенням вилучення вугілля в концентрат. Подальше зростання довжини латексних ланцюжків за рахунок підвищення витрат латексу унеможливило негативний вплив на вилучення електростатичних сил відштовхування.

Аналіз наведених поверхонь вказує на значне зниження ε при агрегації вугілля з високим вмістом золи (зростання параметра X_3). Особливо чітко ця тенденція проявляється при тривалості флокуляції 60 секунд і більше. Це обумовлено вже згаданим вище негативним впливом мінеральної компоненти на формування латексних ланцюжків та їх закріплення на вугільних частках. Крім того, з ростом тривалості флокуляції підвищується імовірність механічного “захвату” у флокули мінеральних часток, що знижує селективність наступної флотації. При невеликій зольності вугілля цей ефект не спостерігається, тому залежність $\varepsilon = f(X_4)$ є зростаючою, а при підвищенні зольності вугілля (X_3) вона поступово змінюється на протилежну.

Таким чином, розроблена регресійна модель підтверджує висунуті вище теоретичні положення, дозволяє прогнозувати результати процесу і може бути використана при розробці технологічних режимів селективної флокуляції вугілля латексами для промислових потреб.

6.2.12 Флокуляційно-флотаційний процес збагачення вугілля

Особливий інтерес викликає розробка регресійних моделей флокуляційно-флотаційного способу збагачення вугільних шламів [44]. Ці моделі повинні включати параметри власне флотаційного процесу. Тому в якості вхідних було обрано три параметри: витрати латексу (X_1), витрати реагента-збирача (X_2) і витрати реагента-спінювача (X_3). Застосовувалися ті ж самі реагенти, що і в попередній серії експериментів.

Дослідження проводилися на тій же лабораторній установці з використанням суспензії вугільних шламів шахти ім.Засядько густиною 150 кг/м^3 і зольністю 26 %. Параметри режиму селективної флокуляції латексом: витрати латексу - згідно плану експерименту; тривалість перемішування (флокуляції) – 80 с; частота обертання імелера змішувача - 29 с^{-1} . Режим флотаційного поділу флокульованого продукту:

- витрати реагента-збирача (гасу) – згідно плану експерименту;
- витрати реагента-спінювача ("Оксаль") – згідно плану експерименту;
- час кондиціонування суспензії з реагентами – 30 с;
- частота обертання імелера – 1750 хв^{-1} ;
- питомі витрати повітря – $2 \text{ м}^3/(\text{год} \cdot \text{м}^2)$;
- час флотації – 2 хвилини.

При розробці статистичної моделі флокуляційно-флотаційного процесу був реалізований симетричний некомпозиційний трирівневий план Бокса-Бенкена, що представляє собою сполучення дворівневого $(-1, +1)$ повного факторного експерименту з неповноблочним збалансованим планом [66]. Ці плани по ряду статистичних характеристик перевершують центрально-композиційні ортогональні і ротатбельні плани, що найбільш широко використовуються в наш час [8].

Як і у попередньому випадку, у якості відгуку був обраний показник вилучення вугільних фракцій в концентрат ε (%).

Рівні факторів та інтервали їх варіювання приведені у таблиці 6.18, а матриця планування і результати експерименту - в таблиці 6.19.

Розробка та аналіз регресійної моделі здійснювалися за допомогою тієї ж самої статистичної програми Statgraphics. Результати приведені на рис. 6.78.

Таблиця 6.18 – Область експериментування

Фактор	Код фактор а	Один. виміру	Інтервал змін	Нижн. рівень	Основн. рівень	Верхн. рівень
Витрати латексу	X_1	г/т	50	150	200	250
Витрати збирача	X_2	г/т	500	500	1000	1500
Витрати спінювача	X_3	г/т	50	50	100	150

Як видно з парето-графіка (див. рис.6.78, а), статистично значимими в цій моделі є всі коефіцієнти за винятком коефіцієнта при парній взаємодії X_1X_2 . З урахуванням цього рівняння регресії має вигляд:

$$\varepsilon = 95,0667 + 0,9625 \cdot X_1 + 4,4875 \cdot X_2 + 3,275 \cdot X_3 - 0,658333 \cdot X_1^2 - 0,725 \cdot X_1 \cdot X_3 - 3,75833 \cdot X_2^2 - 1,425 \cdot X_2 \cdot X_3 - 2,58333 \cdot X_3^2$$

Таблиця 6.19 – Матриця планування експерименту та результати дослідів

№ дослідів	X_1	X_2	X_3	$\varepsilon_{\text{експ}}, \%$
1	-1	-1	0	85,3
2	+1	-1	0	87,3
3	-1	+1	0	94,4
4	+1	+1	0	95,6
5	-1	0	-1	87,0
6	+1	0	-1	90,7
7	-1	0	+1	94,4
8	+1	0	+1	95,2
9	0	-1	-1	79,1
10	0	+1	-1	91,2
11	0	-1	+1	89,1
12	0	+1	+1	95,5
13	0	0	0	95,0
14	0	0	0	95,1
15	0	0	0	95,1

Графік порівняння розрахункових і експериментальних даних (рис. 1,б) показує, що в більшості випадків різниця між ними мінімальна. Адекватність моделі процесу, що досліджується, підтверджується великим значенням коефіцієнту детермінації $R^2 = 99,68 \%$.

З наведених даних витікає, що значущість досліджуваних факторів зростає в ряду $X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2$. Залежність функції відгуку ε від всіх цих факторів має екстремальний характер з чітко визначеним екстремумом-максимумом. Це свідчить про можливість оптимізації процесу по всіх трьох факторах. Ця оптимізація була виконана засобами програми Statgraphics.

В межах факторного простору, що був заданий в експерименті, екстремум-максимум функції відгуку ε характеризується такими оптимальними значеннями факторів (в нормованому виді): $X_1 = 0,4138$; X_2

= -0,5030; $X_3 = 0,4373$. Координати екстремуму позначені точками на контурних кривих поверхні відгуку (див.рис. 1, г) В перерахунку на натуральні значення маємо:

- витрати латексу $X_1 = 230$ г/т ;
- витрати реагента-збирача (гасу) $X_2 = 1250$ г/т ;
- витрати реагента-спінювача (Оксаль) $X_3 = 130$ г/т.

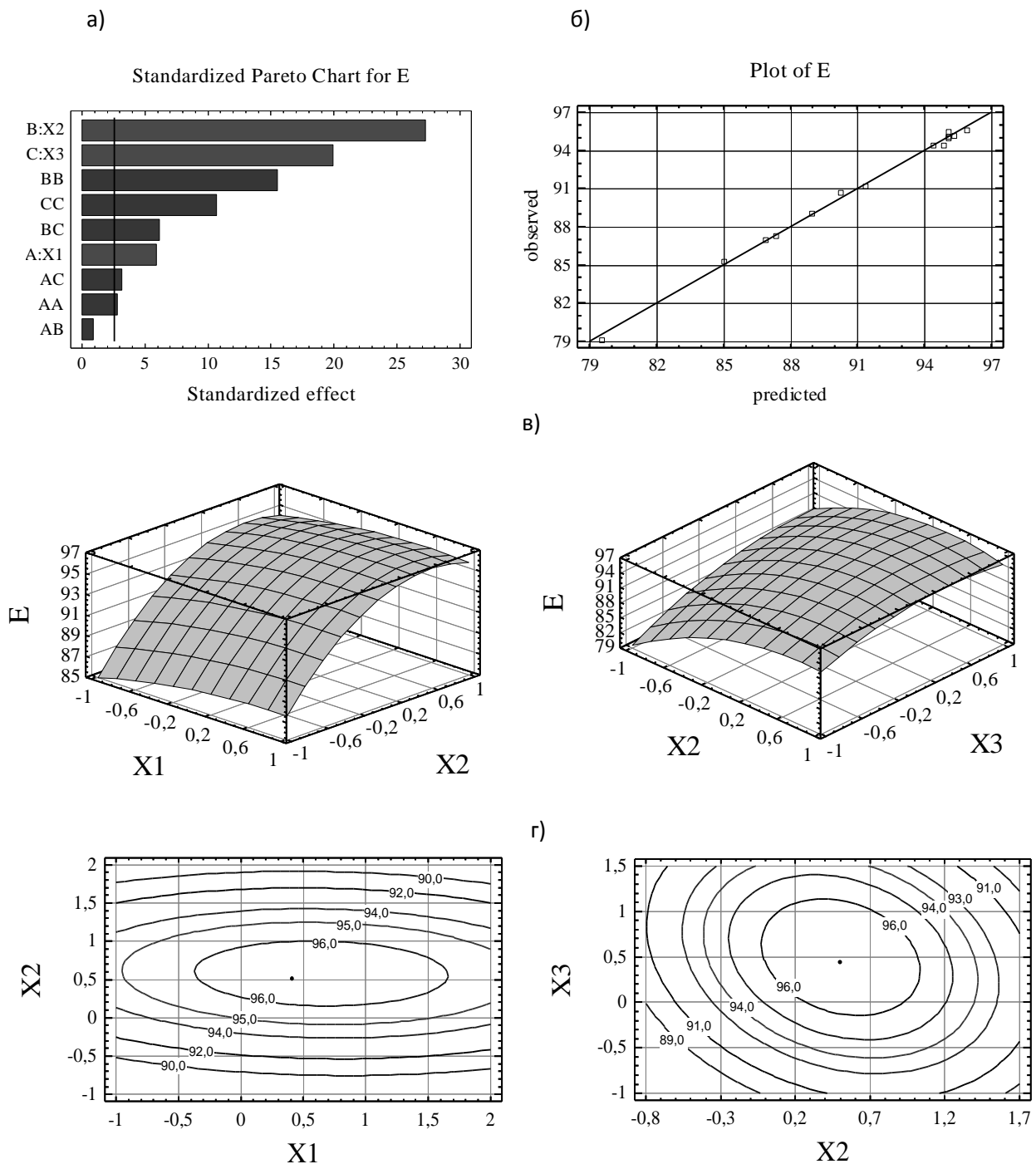


Рисунок 6.78 – Аналіз регресійної моделі процесу флокуляційно-флотаційного збагачення вугільних шламів:

- а – парето-графік (вертикальна лінія відповідає 95% значущості коефіцієнтів моделі);
- б – графік порівняння розрахункових (predicted) і експериментальних (observed) даних;
- в – тривимірні перетини функції відгуку;

г – контурні криві функції відгуку.

Значення цільової функції, що передбачене регресійною моделлю в точці екстремуму, складає $\varepsilon = 97,1 \%$. Експериментально знайдене значення в цій точці $\varepsilon = 96,9 \%$. Близькість експериментальних і розрахункових значень цільової функції в точці екстремуму є ще одним підтвердженням адекватності одержаного рівняння регресії.

6.2.13 Суміщений процес «селективна масляна агрегація – гідротранспорт вугілля»

Актуальною проблемою сучасного вуглезбагачення є ефективна переробка шламів мулонакопичувачів і шламовідстійників. При вуглезбагачувальних фабриках України станом на 2007 р. знаходилося 35 мулонакопичувачів загальним об'ємом 129 млн куб. м, які містили 114 млн т шламів, переважно відходів флотації зольністю 45-75 % [73].

Для переробки лежалих шламів використовують гравітаційні методи збагачення (гідросайзер, гвинтові сепаратори тощо). Разом з тим, недоліком гравітаційних технологій переобки є їх низька ефективність на класах $-0,1$ мм. Це робить актуальним пошук і впровадження комплексних технологій збагачення шламів включно з тонкими класами.

Нами пропонується для збагачення вугілля кл. $-0,1$ мм застосовувати технологію селективної масляної агрегації [47]. Але її вузьким місцем є відносно великі витрати аполярних реагентів, що суттєво обмежує можливість використання цієї технології для енергетичного вугілля. Доцільніше застосування селективної масляної агрегації для коксівного вугілля з використанням в якості реагенту продуктів коксохімічного виробництва (які у цьому випадку повертаються у процес коксування разом з вугіллям).

Для реалізації процесу селективної масляної агрегації використовують різноманітні мішалки [46], але водночас процес може відбуватися у будь-якому турбулентному потоці води, наприклад, під час гідравлічного транспортування вугільних шламів з мулонакопичувача до вуглепідготовчого цеху коксохімзаводу.

Мета цієї роботи – дослідження суміщеного процесу “Селективна масляна агрегація – гідротранспорт вугілля” методом планового експерименту з одержанням регресійної моделі процесу.

Суть дослідження полягала у виявленні характеру залежності зольності концентрату селективної масляної агрегації від трьох факторів: витрат реагенту (X_1), дальності гідравлічного транспортування водо-вугільно-реагентної суміші (X_2) та її концентрації (X_3). Схема експерименту: підготовка водо-вугільної суміші до гідротранспорту, добавка реагента згідно плану експеримента, гідравлічне транспортування суміші на стенді при швидкості $V = 1,1V_{кр}$, зневоднення вугільного шламу на відсаджувальній центрифугі при $Fr = 1000$. Кек центрифуги являє собою концентрат процесу селективної масляної агрегації, а твердий осад фугату – відходи. Застосовувалися стенди НВО “Хаймек” та обладнання кафедри “Збагачення корисних копалин” Донецького національного технічного університету. Як вихідний матеріал взято шлами мулонакопичувача Ясинівського КХЗ, збагачений гвинтовою сепарацією до зольності 30 %. Крупність шламів складала 3-0 мм, вміст кл. –0,1 мм – 26 %.

Для планування експерименту вибрано некомпозиційний трирівневий план Бокса-Бенкена для трьох факторів, який згідно [71] за своїми характеристиками переважає центрально-композиційний план.

Фактори та границі їх варіювання наведені в таблиці 6.20.

Таблиця 6.20 – Фактори та границі їх варіювання.

Фактор	Код фактора	Одиниця вимірювань	Рівні факторів		
			-1	0	+1
Витрати реагента	X_1	мас. %	0,5	1,5	2,5
Дальність транспортування	X_2	м	600	3000	5400
Концентрація гідросуміші	X_3	мас. %	10	30	50

Обробка результатів експерименту здійснювалася за комп’ютерною програмою “Statgraphics”.

Аналіз значущості коефіцієнтів моделі виконано на основі Паретто-графіка (рис.6.79а). Як видно, значущими є коефіцієнти при X_1 , X_2 , X_3 , при квадратичному члені X_1^2 та члені, що відображає парну взаємодію X_1X_3 . Ці коефіцієнти знаходяться праворуч вертикальної лінії на Паретто-графіку, що відповідає 95 % значущості.

З урахуванням значущості коефіцієнтів рівняння регресії має вигляд:

$$\text{Ash} = 15,4667 - 3,8625 \cdot X_1 - 1,4375 \cdot X_2 - 1,625 \cdot X_3 + 2,46667 \cdot X_1^2 - 0,475 \cdot X_1 \cdot X_3 \quad (6.15)$$

Адекватність моделі в цілому підтверджується високим значенням коефіцієнта детермінації $R\text{-кв} = 99,53 \%$ і тим, що критерій Lack-of-fit (втрати узгодженості функцій) складає 0,0804, що перевищує критичне значення (0,05). На рис. 6.79, б показана відповідність експериментальних даних (observed) і розрахункових (predicted). На рис. 6.80 подані тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції та їх контурні криві (лінії рівня).

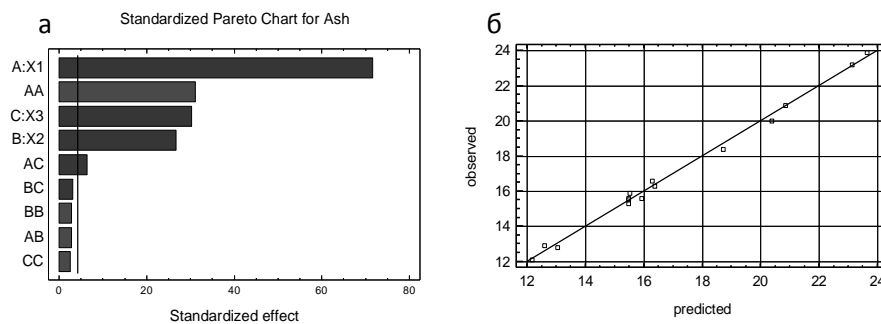


Рисунок 6.79 – Характеристики регресійної моделі

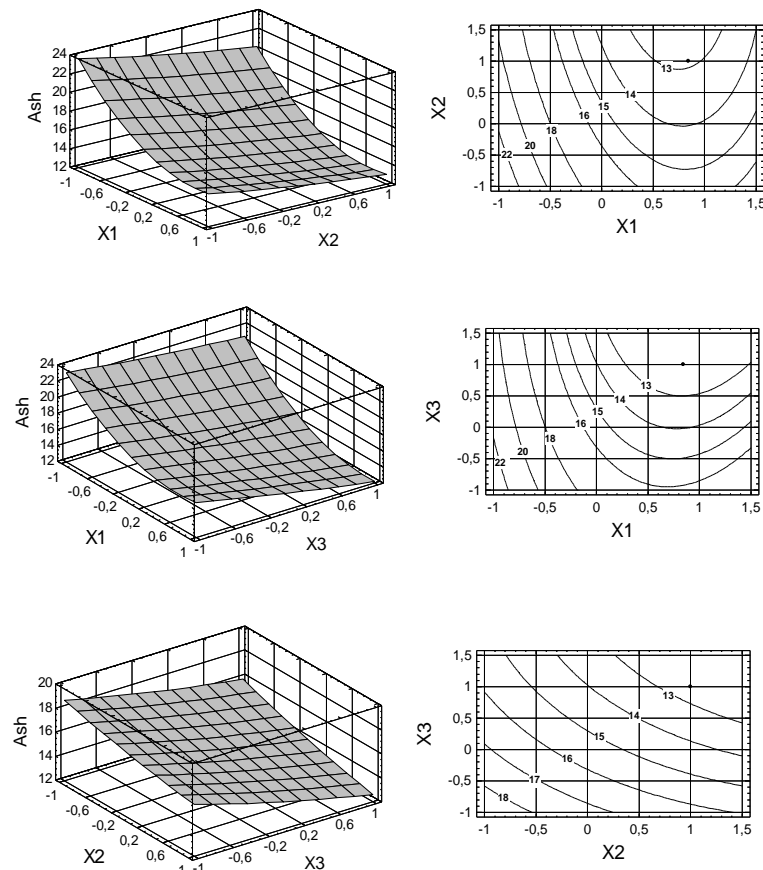


Рисунок 6.80 – Тривимірні перетини гіперповерхні цільової функції та їх контурні криві.

Гіперповерхні мають неекстремальний характер. Як видно з рис. 6.79 і 6.80, зростання кожного з факторів (X_1 , X_2 , X_3) призводить до покращення якості концентрату (зниження його зольності), але найбільш впливає на зольність концентрату селективної масляної агрегації фактор X_1 – витрати реагенту. Фактори X_2 , X_3 практично рівнозначні за своїм впливом на цільову функцію. На контурних кривих (рис. 6.80) точками показані оптимальні значення факторів X_1 , X_2 , X_3 , що відповідають мінімальному значенню зольності концентрата.

Значення факторів, що відповідають оптимуму ($A_k^d = 10,85 \%$), у кодованому і натуральному вираженні подані в таблиці 6.21.

Таблиця 6.21 – Оптимальні значення факторів

Фактор	Low	High	Оптимальне значення	
			кодоване	натуральне
X_1	-1,0	1,0	0,843772	2,1 %
X_2	-1,0	1,0	1,0	5400 м
X_3	-1,0	1,0	0,999135	50 %

Зольність відходів селективної масляної агрегації складала 69-76 %.

Одержані результати дозволяють зробити такі висновки:

1. Суміщений процес “Селективна масляна агрегація – гідротранспорт вугілля” дозволяє ефективно збагачувати тонкодисперсні фракції шламів коксівного вугілля з одержанням відносно низькозольних концентратів, які можуть бути присаджені до шихти.

2. Мінімальне значення зольності концентрату одержують при витратах реагента порядку 2 %, дальності гідравлічного транспортування 5,5 км і концентрації гідросуміші 50 %.

6.2.14 Процес осадження твердої фази хвостів флотації рідкіснометалічних руд

Інтенсифікація процесу осадження твердої фази за рахунок застосування синтетичних високополімерних флокулянтів дозволяє не вдаючись до спорудження додаткових апаратів суттєво підвищити продуктивність згущувачів на існуючих збагачувальних фабриках та обмежитися меншою кількістю згущувачів на фабриках, що проектуються. При цьому з'являється можливість досягти значної економії на капітальних

витратах та стійких параметрів згущеного продукту і зливу згущувачів [74, 75].

Такий ефект досягається тим, що під дією флокулянтів змінюються поверхневі властивості твердої фази, що за сприятливих умов призводить до злипання часток твердої фази у великі агрегати, які, як відомо, осаджуються з більшою швидкістю [58]. В залежності від фізико-хімічних умов знаходження твердої фази в пульпі її поверхневі властивості можуть змінюватися. Інколи це призводить до зниження швидкості осадження твердої фази [76]. Науковою та практичною проблемою є вивчення цих умов та управління ними, що дозволить визначити раціональні режими процесу та оптимізувати витрати флокулянту, забезпечити найвищу швидкість осадження твердої фази.

Державною програмою розвитку кольорової металургії України на період до 2010 року передбачено створення вітчизняної сировинної бази рідкіснометалевої галузі за рахунок першочергового освоєння Мазурівського родовища цирконій-тантало-ніобієвих руд (маріуполітів) [77]. Рідкіснометалеві руди характеризуються низьким вмістом корисних компонентів та дуже дрібним зерном. Збагачення таких руд відбувається в середовищі, що вміщує до 80-94% води за об'ємом, вимагає більш тонкого подрібнення, більших об'ємів води та більших витрат на процеси зневоднення твердого матеріалу. Більшого значення сьогодні набувають також питання регенерації води, очистки водного середовища від шкідливих сполук та твердих речовин.

Інтенсифікація осадження твердої фази за рахунок застосування синтетичних флокулянтів дозволить обмежитися меншою кількістю згущувачів на збагачувальній фабриці, що проектується для Маріупольського металургійного комбінату ім. Ілліча. При цьому з'являється можливість досягти стійких параметрів згущеного продукту та зливу згущувачів за мінімальних витрат досить дорогих флокулянтів [78].

Проблема оптимізації режиму осадження твердої фази та витрат флокулянту розглядалася та частково вирішена для окремих типів мінеральної сировини [79-82]. Разом з тим, сучасний рівень вивченості механізму флокуляції хоч і дає якісну характеристику процесу, та не дає кількісних залежностей, які для конкретного типу промислової пульпи характеризували б вплив основних технологічних її параметрів на швидкість осадження твердої фази, дозволяли визначити раціональні режими процесу і розрахувати оптимальні витрати флокулянту, що

забезпечують найвищу швидкість осадження. При недостатньому дозуванні флокулянту злипання частинок не відбувається через малу товщину покриття частинок твердої фази; при передозуванні флокуляція не відбувається через стабілізацію пульпи. Звичайно оптимальні витрати флокулянту визначають в залежності від витрат твердої фази пульпи живлення згущувача. Але відомо, що ступінь флокуляції суттєво залежить від електрокінетичного потенціалу на поверхні частинок твердої фази, який визначається концентрацією іонів водню в рідкій фазі пульпи [83]. Тому вибір флокулянту та його витрат має бути узгодженим з мінералогічним та гранулометричним складом твердої фази, а також іонним складом рідкої фази пульпи. Цей вибір може бути обґрунтований лабораторними дослідженнями осадження пульп.

Метою даної роботи є дослідження впливу основних параметрів процесу осадження нефелін-польовошпатових (польовоскалинцевих?) хвостів основної флотації цирконій-тантало-ніобієвої руди на швидкість осадження твердої фази та одержання математичної моделі у вигляді рівняння регресії, придатної для визначення раціональних режимів процесу і розробки системи автоматичного дозування флокулянту.

Аналіз відомих аналітичних залежностей [84] та експериментальних даних показав, що найбільш суттєвими параметрами процесу осадження є: питомі витрати флокулянту, концентрація іонів водню в рідкій фазі (рН середовища), дисперсність твердої фази пульпи та її концентрація у пульпі, а також температура пульпи, від якої залежить в'язкість і густина пульпи.

Завдання вирішували методом активного експерименту в лабораторних умовах хіміко-металургійної фабрики ММК ім. Ілліча. Лабораторні дослідження проводили за відомою методикою [85] в скляному циліндрі ємністю 500см³. Об'єктом дослідження були штучні пульпи, які готували з сухих порошків нефелін-польовошпатових хвостів колишньої збагачувальної фабрики, що переробляла руду Мазурівського родовища.

При плануванні експерименту за незалежні фактори приймали:

Q_f – питомі витрати флокулянту, см³/дм³ пульпи;

рН – концентрація іонів водню, од.;

C – концентрація твердої фази в пульпі, %;

d – вміст класу мінус 0,063 мм в твердій фазі, %;

t – температура пульпи, °С;

pH пульпи доводили до завданого значення розчином соди (Na_2CO_3). Як флокулянт застосовували 0,1%-ий водний розчин поліакриламід (ПАА), який вводили в скляний циліндр піпеткою.

В якості цільової функції (Y , мм/с) прийнято швидкість осадження, яка визначалася згідно загальноприйнятих рекомендацій [85]. При проведенні експерименту сліdkували за опусканням межі розподілу фаз в циліндрі. Час, за який межа розподілу фаз досягала контрольної позначки на шкалі циліндра, реєстрували за допомогою секундоміру. Швидкість осадження визначали за зміною часу проходження межею розподілу фаз контрольної позначки.

Експеримент поставлено за програмою центрального композиційного ротатабельного плану другого порядку Бокса-Хантера [86]. Ядро плану представлено напівреплікою 2^{5-1} ($1=X_1X_2X_3X_4X_5$). Реалізовані 16 дослідів на основних рівнях доповнені ще 10 дослідями в зіркових точках (величина зіркового плеча в цьому випадку дорівнює 2) та шістьма дослідями в центрі плану.

Основні рівні, інтервали варіювання факторів та межі області дослідження вибрані за результатами попередніх експериментів і на основі апріорної інформації (табл.6.22).

Таблиця 6.22 – Основні рівні, інтервали варіювання факторів та межі області дослідження

Параметр	Позначення	Код	Одиниця виміру	Інтервал	Основні рівні				
					+2	+1	0	-1	-2
Витрати флокулянту	Q_{ϕ}	X1	$\text{см}^3/\text{дм}^3$	0,05	0,20	0,15	0,10	0,05	0,00
Концентрація іонів водню	pH	X2	од.	0,80	10,0	9,20	8,40	7,60	6,80
Вміст класу мінус 0,063 мм в твердій фазі	d	X3	%	5,00	100,0	95,0	90,0	85,0	80,0
Концентрація твердої фази в пульпі	C	X4	%	5,00	30,0	25,0	20,0	15,0	10,0
Температура пульпи	t	X5	°C	5,00	26,0	21,0	16,0	11,0	6,00

Область зміни незалежних факторів відповідає діапазону змін технологічних параметрів в промислових умовах згідно розробленого технологічного регламенту.

В табл. 6.23 наведена матриця планування і результати її реалізації.

Таблиця 6.23 – Матриця планування і результати її реалізації

№ досліджу	X1	X2	X3	X4	X5	Y _{екс.}	Y _{розрах.}
1	+1	+1	+1	+1	+1	4,52	4,40
2	-1	+1	+1	+1	-1	2,50	2,18
3	+1	-1	+1	+1	-1	3,46	3,07
4	-1	-1	+1	+1	+1	4,41	4,18
5	+1	+1	-1	+1	-1	5,00	4,71
6	-1	+1	-1	+1	+1	4,62	4,48
7	+1	-1	-1	+1	+1	6,40	6,19
8	-1	-1	-1	+1	-1	4,88	4,47
9	+1	+1	+1	-1	-1	7,48	7,62
10	-1	+1	+1	-1	+1	7,91	8,20
11	+1	-1	+1	-1	+1	9,40	9,63
12	-1	-1	+1	-1	-1	7,44	7,46
13	+1	+1	-1	-1	+1	13,77	14,09
14	-1	+1	-1	-1	-1	8,70	8,82
15	+1	-1	-1	-1	-1	11,00	11,05
16	-1	-1	-1	-1	+1	13,70	13,91
17	-2	0	0	0	0	3,95	4,09
18	+2	0	0	0	0	5,80	5,85
19	0	-2	0	0	0	5,30	5,57
20	0	+2	0	0	0	4,30	4,21
21	0	0	-2	0	0	10,25	10,34
22	0	0	+2	0	0	5,00	4,71
23	0	0	0	-2	0	17,10	16,33
24	0	0	0	+2	0	3,60	4,56
25	0	0	0	0	-2	5,48	5,93
26	0	0	0	0	+2	10,13	9,86
27	0	0	0	0	0	7,30	7,30
28	0	0	0	0	0	7,55	7,30
29	0	0	0	0	0	7,10	7,30
30	0	0	0	0	0	6,93	7,30
31	0	0	0	0	0	7,49	7,30
32	0	0	0	0	0	7,60	7,30

Функція відгуків апроксимована поліномом другого порядку виду:

$$Y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i X_i + \sum_{1 \leq i, l \leq k} b_{il} X_i X_l + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} X_i^2,$$

де k – число незалежних змінних.

Обробка результатів експерименту та аналіз регресійної моделі здійснено за допомогою модуля „Планування експерименту” статистичної програми Statgraphics 3.0 Plus.

Значущість коефіцієнтів моделі визначалася за допомогою Р-рівня і наведено на стандартизованому Парето-графіку (рис.6.81). Вертикальна лінія на рис. 6.81 відповідає 95% статистичній значущості коефіцієнтів.

Рівняння регресії з урахуванням значущості коефіцієнтів отримало вигляд:

$$Y = 7,30 + 0,44 \cdot X_1 - 0,34 \cdot X_2 - 1,31 \cdot X_3 - 2,94 \cdot X_4 + 0,98 \cdot X_5 - 0,58 \cdot X_1^2 + 0,45 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,60 \cdot X_2^2 + 0,56 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,79 \cdot X_4^2 - 0,38 X_4 \cdot X_5$$

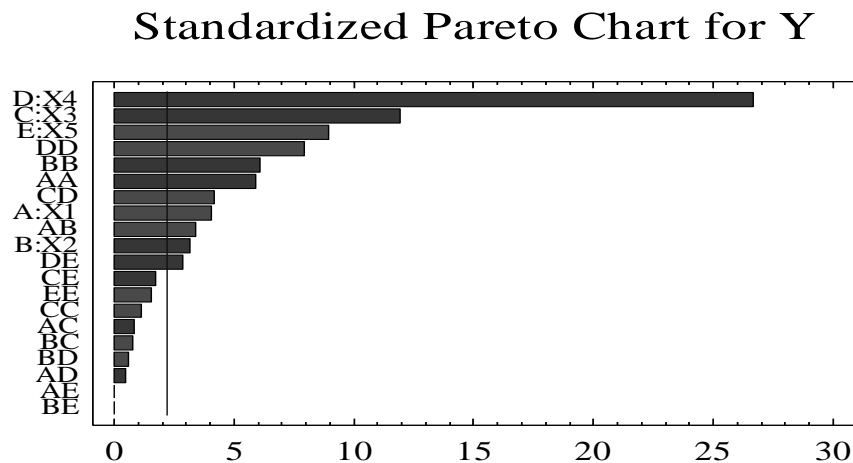


Рисунок 6.81 – Значущість коефіцієнтів моделі (Парето-графік)

Коефіцієнти моделі наведено в нормованому (кодованому) виді.

Адекватність одержаної регресійної моделі підтверджується великим значенням коефіцієнту детермінації R-квадрат, який складав 99,044 %.

На рис. 6.82 - 6.83 наведені найбільш характерні тривимірні перетини поверхні цільової функції та контурні криві цих поверхонь. Зупинимось на них докладніше.

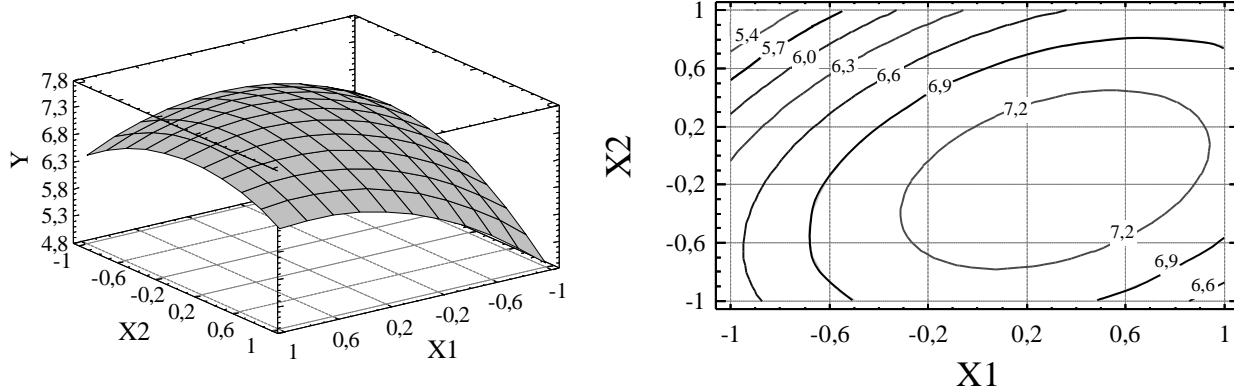


Рисунок 6.82 – Поверхня $Y = f(X_1, X_2)$ та її контурні криві.

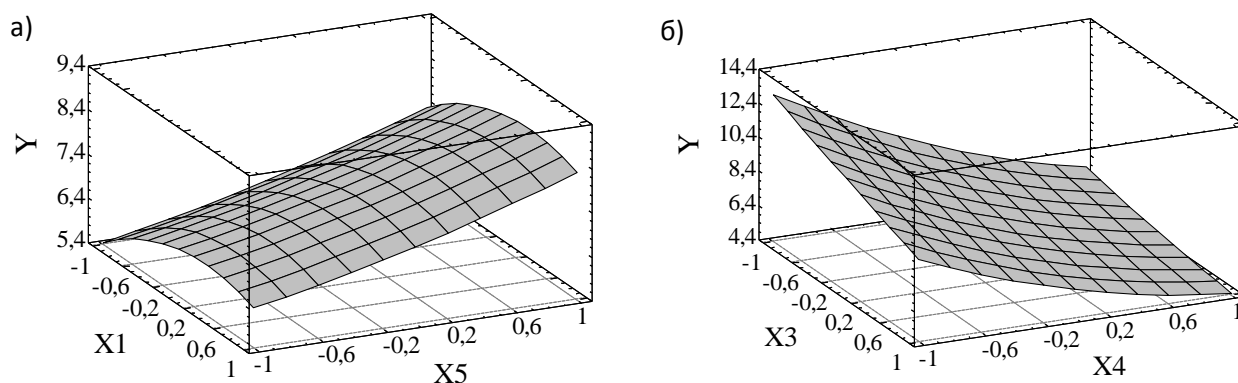


Рисунок 6.83 – Графіки поверхонь $Y = f(X_1, X_5)$ та $Y = f(X_3, X_4)$

Залежність $Y = f(X_1, X_2)$ має екстремальний характер з екстремумом-максимумом в області $X_1 = -0,2 \dots 0,9$; $X_2 = -0,8 \dots 0,5$ (в кодованому вигляді).

Екстремальна залежність швидкості осадження від витрат флокулянту може бути пояснена тим, що при недостатніх витратах флокулянту на поверхні частинок твердої фази утворюється плівка замалої товщини, а при передозуванні флокулянту настає стабілізація пульпи [58].

Екстремальний характер залежності швидкості осадження від величини рН середовища пов'язаний, на нашу думку, із загальновизнаним механізмом дії електроліту на подвійний електричний шар (ПЕШ) на поверхні частинок. Спочатку, зі збільшенням рН спостерігається стиснення дифузної частинки ПЕШ за рахунок переходу протиіонів у внутрішню обкладинку. Це, очевидно, полегшує закріплення і

флокулюючу дію реагенту. Подальше збільшення рН супроводжується перезарядкою поверхні частинки. При цьому умови закріплення реагенту погіршуються і ефект флокуляції дещо знижується.

На рис. 6.83, а проілюстровано вплив температури пульпи на процес осадження. З підвищенням температури у всьому визначеному діапазоні факторного простору спостерігається збільшення швидкості осідання твердої фази, що обумовлено, на нашу думку, зниженням в'язкості суспензії та її густини.

Як видно з рис. 6.83, б зростання вмісту класу мінус 0,063мм у твердій фазі вихідного матеріалу та зростання концентрації твердої фази приводить до зниження швидкості осадження твердої фази.

Одержані результати дозволяють зробити такі висновки:

В результаті проведених досліджень розроблено регресійну математичну модель, яка адекватна процесу осадження нефелін-польовошпатових хвостів збагачення рідкіснометалевих руд Мазурівського родовища.

Встановлено, що залежність швидкості осадження твердої фази в згущувачі від питомих витрат флокулянту – поліакриламід, - та концентрації іонів водню (рН) в пульпі носить екстремальний характер.

Одержана модель дозволяє визначити раціональні параметри найбільш значущих факторів процесу – витрат флокулянту та рН середовища.

Модель може бути застосована при розробці промислової технології та засобів управління процесом осадження пульпи у радіальному згущувачі.

ДОДАТОК А
Густина і твердість мінералів розділюваних
гравітаційними процесами

Мінерал	Хімічний склад		Густина, кг/м³	Твердість (по Моосу)
	формула	вміст, %		
1	2	3	4	5
<u>Алмаз</u>	C	100,0 C	3500	10,0
<u>Алюміній</u>	Al	100,0 Al	2600	2,9
Андалузит	Al ₂ O ₃ ·SiO ₂	63,2 Al ₂ O ₃	3200	7,0
Каолін	Al ₂ O ₃ ·2SiO ₂ ·2H ₂ O	39,5 Al ₂ O ₃	2600	2,3
Корунд	O	100,0 Al ₂ O ₃	4000	9,0
Шпінель	Al ₂ O ₃ MgO·Al ₂ O ₃	71,8 Al ₂ O ₃	3800	8,0
<u>Барій</u>	Ba	100,0 Ba	3600	3,5
Барит	BaSO ₄	65,7 BaO	4500	3,7
Вітерит	BaCO ₃	82,7 BaO	3750	4,2
<u>Вольфрам</u>	W	100,0 W	19000	7,5
Вольфраміт	(Fe, Mn) WO ₄	74,0 WO ₃	7000	6,0
Гюбнерит	MnWO ₄	75,0 WO ₃	7400	4,5
Ферберит	FeWO ₄	76,3 WO ₃	7000	4,5
Шеєліт	CaWO ₄	80,6 WO ₃	6000	5,0
<u>Залізо</u>	Fe	100,0 Fe	7800	4,5
Гематит	Fe ₂ O ₃	70,0 Fe	5100	6,0
Гетит	Fe ₂ O ₃ ·H ₂ O	63,0 Fe	3800	5,0
Лімоніт	2Fe ₂ O ₃ ·3H ₂ O	66,5 Fe	3800	5,4
Магнетит	Fe ₃ O ₄	72,4 Fe	5100	6,0
Пірит	FeS ₂	46,6 Fe	5100	6,3
Сидерит	FeCO ₃	48,3 Fe	3800	4,0
<u>Золото(самородне)</u>	Au	до 99,7 Au	19000	2,5
Калаверит	(Au, Ag) Te ₂	39,5 Au; 3,1 Ag	9000	2,5
Кренерит	(Au, Ag) Te ₂	39,5 Au; 3,1 Ag	8350	2,0
Петцит	(Au, Ag) ₂ Te	25,4 Au; 41,8 Ag	9000	3,0
Сильваніт	(Au, Ag) Te ₄	24,2 Au; 13,3 Ag	8100	2,5
<u>Магній</u>	Mg	100,0 Mg	1700	2,5
Доломіт	CaCO ₃ ·MgCO ₃	21,9 MgO; 30,4 CaO	2800	3,8
Змійовик	Mg ₆ [Si ₄ O ₁₀](OH) ₈	43,5 MgO; 43,5 SiO ₂	2800	4,0
Магнезит	MgCO ₃	47,8 MgO	3100	4,0
<u>Марганець</u>	Mn	100,0 Mn	7400	6,0
Манганіт	Mn ₂ O ₃ ·H ₂ O	62,5 Mn	4300	3,8
Піролюзит	MnO ₂	63,0 Mn	5000	2,3
Псиломелан	Mn ₂ O ₃	63,0 Mn	4150	5,5
Родоніт	MnSiO ₃	42,0 Mn	3500	6,2
Родохрозит	MnCO ₃	62,0 Mn	3500	4,2
<u>Мідь(самородна)</u>	Cu	до 100,0 Cu	8800	2,8
Азурит	2CuCO ₃ ·Cu(OH) ₂	55,2 Cu	3700	3,8
Ковелін	CuS	66,4 Cu	4600	2,0
Малахіт	CuCO ₃ ·Cu(OH) ₂	57,4 Cu	3900	3,8
Халькозин	Cu ₂ S	79,8 Cu	5600	3,0
Халькопірит	CuFeS ₂	34,5 Cu	4200	3,7
Хризосола	CuSiO ₃ ·2H ₂ O	36,1 Cu	2100	3,5

Продовження табл.

1	2	3	4	5
<u>Молибден</u>	Mo	100,0 Mo	10200	5,5
Вульфеніт	PbMoO ₄	26,0 Mo	6800	3,0
Молибденіт	MoS ₂	до 60,0 Mo	4700	1,3
Молибдит	Fe ₂ O ₃ ·MoO ₃ ·7H ₂ O	66,7 Mo	4500	1,5
Повеліт	CaMoO ₄	48,0 Mo	4500	3,5
<u>Нікель</u>	Ni	100,0 Ni	8900	4,0
Герсдорфіт	NiAsS	35,4 Ni	5800	5,5
Нікелін	NiAs	44,0 Ni	7500	5,5
Пентландит	(Fe, Ni) ₉ S ₈	до 44,0 Ni	4600	3,5
<u>Олово</u>	Sn	100,0 Sn	7300	2,0
Каситерит	SnO ₂	79,0 Sn	6900	6,5
Станін	Cu ₂ FeSnS ₄	27,6 Sn; 29,6 Cu	4400	4,0
<u>Платина (самородна)</u>	Pt	до 96,0 Pt	21400	4,5
Поліксен	(Pt, Fe)	88,0 Pt; 11,0 Fe	17400	4,5
Спериліт	PtAs ₂	56,5 Pt; 43,5 As	10600	6,5
<u>Свинець</u>	Pb	100,0 Pb	11300	1,5
Англезит	PbSO ₄	68,3 Pb	6200	2,5
Вульфеніт	PbMoO ₄	60,0 Pb	6700	3,5
Галеніт	PbS	86,6 Pb	7450	2,5
Церусит	PbCO ₃	83,5 Pb	6550	3,3
Піроморфіт	Pb ₅ (PO ₄) ₃ Cl	76,0 Pb	7000	4,0
<u>Срібло (самородне)</u>	Ag	До 99,9 Ag	10500	2,8
Аргентит	Ag ₂ S	87,1 Ag	7300	2,5
Піраргірит	AgSbS ₃	59,8 Ag	5830	2,3
Полібазит	(Ag, Cu) ₁₆ Sb ₂ S ₁₁	84,9 Ag	6100	3,0
Прустит	Ag ₃ AsS ₃	65,4 Ag	5600	2,5
Стефаніт	Ag ₅ SbS ₄	68,3 Ag	6200	2,5
<u>Титан</u>	Ti	100,0 Ti	4500	4,0
Анатаз	TiO ₂	до 99,5 Ti	3900	6,0
Брукіт	TiO ₂	до 99,5 Ti	4000	6,3
Ільменіт	FeTiO ₃	до 52,8 Ti	4600	5,5
Лейкоксен	(TiO ₂) ₁₈ ·Fe ₂ O ₃	до 97,6 Ti	4000	5,0
Лопарит	(Ce, Na, Ca)(Ti, Nb)O ₃	до 99,5 Ti	4800	5,8
Перовськіт	CaTiO ₃	до 57,8 Ti	4000	5,8
Рутил	TiO ₂	до 99,5 Ti	4200	6,0
Сфен	CaSiTiO ₅	до 40,8 Ti	3500	5,5
<u>Хром</u>	Cr	100,0 Cr	7100	9,0
Хроміт	FeCr ₂ O ₄	65,0 Cr ₂ O ₃	4700	6,5
Хромшпінеліди	(Mg, Fe)(Cr, Al, Fe) ₂ O ₄	до 75,0 Cr ₂ O ₃	4700	6,5
<u>Цинк</u>	Zn	100,0 Zn	7100	2,5
Вілеміт	Zn ₂ [SiO ₄]	59,0 Zn	5600	4,3
Вюртцит	ZnS	до 63,0 Zn	4300	4,0
Каламін	Zn ₄ [(OH) ₂ Si ₂ O ₇]·H ₂ O	54,0 Zn	3450	4,7
Смітсоніт	ZnCO ₃	52,0 Zn	5100	6,3
Сфалерит	ZnS	67,0 Zn	4100	4,0
Франклініт	ZnFe ₂ O ₄	до 25,0 Zn	6500	5,3

Закінчення табл.

1	2	3	4	5
<u>Цирконій</u>	Zr	100,0 Zr	-	-
Баделейт	ZrO ₂	до 99,0 Zr	5800	6,5
Циркон	ZrSiO ₄	67,2 Zr	4700	7,5
<u>Інші мінерали</u>				
Дистен	Al ₂ O ₃ [SiO ₄]	63,2 Al ₂ O ₃	3600	6,0
Монацит	(Ce, La){PO ₄ }	до 70,0 TR ₂ O ₃	5200	5,8
Ставроліт	Fe ₂ Al ₉ [SiO ₄] ₄ (OH)O ₇	48,1 Al ₂ O ₃	3700	7,2
Флюорит	CaF ₂	51,3 Ca; 48,7 F	3150	4,0
<u>Породні мінерали</u>				
Галуазит	Al ₄ (OH) ₈ [Si ₄ O ₁₀]·nH ₂ O	-	2600	2,0
Глина	Al ₂ O ₃ ·2SiO ₂ ·2H ₂ O	-	2600	2,3
Кальцит	CaCO ₃	-	2710	3,2
Кварц	SiO ₂	-	2650	7,0
Мусковіт	KAl ₂ [AlSi ₃ O ₁₀](OH) ₂	-	2830	2,5
Польові шпати	(K, Na, Ca)[AlSi ₃ O ₈]	-	2700	6,2
Флогопіт	KMg ₃ [AlSi ₃ O ₁₀](F, OH) ₂	-	2900	2,5
Хлорити	(Mg, Fe) _{6-n} (Al, Fe) _n Al _n Si _{4-n} O ₁₀	-	3000	2,5

ДОДАТОК Б
Питома магнітна сприйнятливість деяких мінералів

Мінерал	Хімічна формула	Питома магнітна сприйнятливість, $\text{м}^3/\text{кг} \cdot 10^{-6}$
Амфібол	Мінерал класу силікатів	0,080 – 0,115
Апатит	$\text{Ca}_5[\text{CO}_3][\text{PO}_4]_3(\text{Fe}, \text{Cl}, \text{OH})$	0,001 – 0,004
Берил	$\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$	0,001
Біотит	$\text{KFe}_3(\text{OH}, \text{F})_2[\text{Al}, \text{Si}_3\text{O}_{10}]$	0,040 – 0,120
Брауніт	$\text{MnO} \cdot 3\text{Mn}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$	0,150
Бурий залізняк	$n\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot m\text{H}_2\text{O}$	0,025 – 0,250
Вернадіт	$\text{MnO}_2 \cdot m\text{H}_2\text{O}$	0,050
Вольфраміт	$(\text{Fe}, \text{Mn}) \text{WO}_4$	0,025 – 0,150
Гаусманіт	Mn_2O_4	0,070
Гематит	Fe_2O_3	0,050 – 0,250
Гетит	$\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$	0,200 – 0,300
Гіпс	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	0,010
Глауконіт	Силікат групи слюд	0,080
Гранат	Ортосилікат	0,100 – 0,200
Гюбнерит	MnWO_4	0,100
Дистен	$\text{Al}_2\text{O}_3[\text{SiO}_4]$	0,002 – 0,012
Егірин	Силікат групи піроксенів	0,110
Ільменіт	FeTiO_3	0,3 – 1,2
Каситерит	SnO_2	0,001 – 0,010
Колумбіт	$(\text{Fe}, \text{Mg})(\text{Nb}, \text{Ta})_2\text{O}_6$	0,025
Магнетит	Fe_3O_4	25 – 50
Маггеміт	$\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$	10 – 25
Манганіт	MnOOH	0,035 – 0,150
Мартит	Fe_2O_3	0,2 – 10
Монацит	$(\text{Ce}, \text{La})\{\text{PO}_4\}$	0,010 – 0,025
Пірит	FeS_2	0,005 – 0,040
Піроксен	Мінерал класу силікатів	0,080
Піролюзит	MnO_2	0,025 – 0,100
Псиломелан	Mn_2O_3	0,060 – 0,120
Родохрозит	MnCO_3	0,170
Рутил	TiO_2	0,002 – 0,015
Сидерит	FeCO_3	0,035 – 0,150
Спекулярит	Fe_2O_3	0,250 – 0,370
Ставроліт	$\text{Fe}_2\text{Al}_9[\text{SiO}_4]_4(\text{OH})\text{O}_7$	0,040 – 0,50
Тальк	$\text{Mg}_3[\text{Si}_4\text{O}_{10}](\text{OH})_2$	0,030

ДОДАТОК В

Електричні властивості деяких мінералів

Мінерал	Хімічна формула	Електричні властивості	
		питомий опір, Ом·м	діелектрична проникність
1	2	3	4
Алмаз	C	10 ¹⁴	16,5
Альбіт	Na[AlSi ₃ O ₈]	10 ¹⁴	4,0
Ангідрит	CaSO ₄	10 ¹¹	5,7 – 7,0
Антрацит	C	10 ¹⁰	7,4 – 9,5
Апатит	Ca ₅ [CO ₃][PO ₄] ₃ (Fe,Cl,OH)	10 ¹⁶	7,4 – 10,5
Арсенопірит	FeAsS	10 ⁸	81,0
Барит	BaSO ₄	10 ¹⁴	5,0 – 12,0
Берил	Al ₂ Be ₃ [Si ₆ O ₁₈]	10 ¹⁰	3,9 – 7,7
Біотит	KFe ₃ (OH,F) ₂ [Al,Si ₃ O ₁₀]	10 ¹⁴	6,0 - 9,3
Боксит	Al ₂ O ₃	10 ¹²	8,0 – 10,0
Брауніт	MnO·3Mn ₂ O ₃ ·SiO ₂	10 ⁸	81,0
Бурий залізняк	<i>n</i> Fe ₂ O ₃ · <i>m</i> H ₂ O	10 ¹²	10,0
Вольфраміт	(Fe, Mn) WO ₄	10 ⁹	15,0
Галеніт	PbS	10 ⁸	81,0
Галіт	NaCl		5,6 – 7,3
Гематит	Fe ₂ O ₃	10 ⁸	25,0
Гетит	Fe ₂ O ₃ ·H ₂ O	10 ⁸	25,0
Гіпс	CaSO ₄ ·2H ₂ O	10 ¹⁴	8,0 – 11,6
Графіт	C	10 ⁸	81,0
Дистен	Al ₂ O ₃ [SiO ₄]	—	5,7 – 7,2
Золото	Au	10 ⁸	81,0
Ільменіт	FeTiO ₃	10 ⁸	33,7 – 81,0
Кальцит	CaCO ₃	10 ¹¹ – 10 ¹⁶	7,8 – 8,5
Каолініт	Al ₄ [Si ₄ O ₁₀](OH) ₈	10 ¹¹	12,0
Каситерит	SnO ₂	10 ¹¹	24,0
Кварц	SiO ₂	10 ¹⁴	4,2 – 5,0
Кіновар	HgS	10 ¹¹	33,7 – 81,0
Корунд	Al ₂ O ₃	10 ⁹	5,6 – 6,3
Куприт	Cu ₂ O	10 ⁸	6,0
Магнетит	Fe ₃ O ₄	10 ⁸	33,7 – 81,0
Манганіт	MnOOH	10 ⁸	81,0
Марказит	Fe ₂ S	10 ⁸	33,7 – 81,0
Мікроклін	K[AlSi ₃ O ₈]	10 ¹⁴	5,0 – 6,9
Молібденіт	MoS ₂	10 ⁸	81,0
Монацит	(Ce, La){PO ₄ }	10 ¹⁵	12,0
Мусковіт	KAl ₂ [AlSi ₃ O ₁₀](OH) ₂	10 ¹⁴	6,0 – 8,0
Олігоклаз	<i>n</i> Na[AlSi ₃ O ₈]· <i>m</i> Ca[Al ₂ Si ₂ O ₈]	10 ¹⁴	6,8
Ортоклаз	K[AlSi ₃ O ₈]	10 ¹⁴	5,0 – 6,2
Пірит	FeS ₂	10 ⁸	33,7 – 81,0
Піролюзит	MnO ₂	10 ⁸	81,0
Піротин	Fe ₂ S	10 ⁸	81,0

Закінчення табл.

1	2	3	4
Пірохлор	$\text{NaCa}[\text{N}_2\text{O}_6](\text{OH}, \text{F})$	10^{13}	4,1 – 4,5
Платина природна	Pt	10^8	81,0
Польові шпати	Алюмосилікати Na, K, Ca, Ba	10^{14}	6,8
Псиломелан	Mn_2O_3	10^8	49,0 – 58,0
Рогова обманка	Гідросилікат Ca, Mg, Fe	10^{13}	7,0 – 8,0
Рутил	TiO_2	10^8	89,0 – 173,0
Сірка самородна	S	10^{14}	3,0 – 3,6
Срібло самородне	Ag	10^8	81,0
Сидерит	FeCO_3	10^8	7,0
Силіманіт	$\text{AlAlO}[\text{SiO}_4]$	–	9,3
Сільвін	KCl	10^{14}	4,8
Смітсоніт	ZnCO_3	10^{14}	8,0 – 9,3
Сподумен	$\text{LiAl}[\text{Si}_2\text{O}_6]$	10^{12}	8,4
Ставроліт	$\text{Fe}_2\text{Al}_9[\text{SiO}_4]_4(\text{OH})\text{O}_7$	–	6,8
Сфалерит	ZnS	–	7,8
Сфен	CaSiTiO_5	–	4,0 – 6,6
Танталіт	$(\text{Fe}, \text{Mn})\text{Ta}_2\text{O}_6$	10^6	–
Титаномagnetит	$(\text{Fe}, \text{Ti})\text{Fe}_2\text{O}_4$	10^8	–
Фаяліт	$\text{Fe}_2[\text{SiO}_4]$	10^{11}	81,0
Флюорит	CaF_2	10^{14}	62,0 – 85,0
Халькозин	Cu_2S	10^8	81,0
Халькопірит	CuFeS_2	10^8	–
Церусит	PbCO_3	10^9	2,3
Циркон	ZrSiO_4	10^{12}	8,6 – 15,0
Шеєліт	CaWO_4	10^{14}	8,0

ДОДАТОК Г
Критерій Ст'юдента t

Число ступенів свободи f	Рівень значимості α			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,71	2,05	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,76	3,66
29	1,70	2,05	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,64	1,96	2,58	3,29

ДОДАТОК Д
Критерій Фішера F

Рівень значимості $\alpha = 0,01$								
$\backslash f_1$ $f_2 \backslash$	4	7	10	16	24	40	100	∞
1	5625,0	5928,0	6056,0	6169,0	6234,0	6286,0	6334,0	6366,0
2	99,25	99,34	99,40	99,44	99,46	99,48	99,49	99,50
3	28,71	27,67	27,23	26,83	26,60	26,41	26,23	26,12
4	15,98	14,98	14,54	14,15	13,93	13,74	13,57	13,46
5	11,39	10,45	10,05	9,68	9,47	9,29	9,13	9,02
6	9,15	8,26	7,87	7,52	7,31	7,14	6,99	6,88
7	7,85	7,00	6,62	6,27	6,07	5,90	5,75	5,65
8	7,01	6,19	5,82	5,48	5,28	5,11	4,96	4,86
9	6,42	5,62	5,26	4,92	4,73	4,56	4,41	4,31
10	5,99	5,21	4,85	4,52	4,33	4,17	4,01	3,91
12	5,41	4,65	4,30	3,98	3,78	3,61	3,46	3,36
14	5,03	4,28	3,94	3,62	3,43	3,26	3,11	3,00
16	4,77	4,03	3,69	3,37	3,18	3,01	2,86	2,75
18	4,58	3,85	3,51	3,19	3,00	2,83	2,68	2,57
Рівень значимості $\alpha = 0,05$								
$\backslash f_1$ $f_2 \backslash$	4	7	10	16	24	40	100	∞
1	225,0	237,0	242,0	246,0	249,0	251,0	253,0	254,0
2	19,25	19,36	19,39	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
3	9,12	8,88	8,78	8,69	8,64	8,60	8,56	8,53
4	6,39	6,09	5,96	5,84	5,77	5,71	5,66	5,63
5	5,19	4,88	4,74	4,60	4,53	4,46	4,40	4,36
6	4,53	4,21	4,06	3,92	3,84	3,77	3,71	3,67
7	4,12	3,79	3,63	3,49	3,41	3,34	3,28	3,23
8	3,84	3,50	3,34	3,20	3,12	3,05	2,98	2,93
9	3,63	3,29	3,13	2,98	2,90	2,82	2,76	2,71
10	3,48	3,14	2,97	2,82	2,74	2,67	2,59	2,54
12	3,26	2,92	2,76	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
14	3,11	2,77	2,60	2,44	2,35	2,27	2,19	2,13
16	3,01	2,66	2,49	2,33	2,24	2,16	2,07	2,01
18	2,93	2,58	2,41	2,25	2,15	2,07	1,98	1,92

Примітка: f_1 – відноситься до більшої дисперсії, f_2 – до меншої.

ДОДАТОК Е
Критерій Кохрена G

Рівень значимості $\alpha = 0,01$								
$\backslash f$ $k \backslash$	1	3	6	10	16	36	144	∞
2	0,9999	0,9794	0,9172	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,8831	0,7606	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,7814	0,6410	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,6957	0,5531	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,6258	0,4866	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,5685	0,4347	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,5209	0,3932	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,4810	0,3592	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,4469	0,3308	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
15	0,5747	0,3317	0,2386	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,2654	0,1877	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
30	0,3632	0,1913	0,1327	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1508	0,1033	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1069	0,0722	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,1225	0,0585	0,0387	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Рівень значимості $\alpha = 0,05$								
$\backslash f$ $k \backslash$	1	3	6	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9392	0,8534	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,7977	0,6771	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,6841	0,5598	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,5981	0,4783	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,5321	0,4184	0,3568	0,3135	0,2612	0,2129	0,1667
7	0,7271	0,4800	0,3726	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,4377	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4027	0,3067	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,3733	0,2823	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
15	0,4709	0,2758	0,2034	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2205	0,1602	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
30	0,2929	0,1593	0,1137	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1259	0,0887	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,0895	0,0623	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0495	0,0337	0,0260	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ДОДАТОК Ж
Критерій Пірсона χ^2

Число ступенів свободи f	Рівень значимості					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Список літератури

1. Пілов П.І., Анісімов М.Т., Анісімов В.М. Математичне моделювання процесів збагачення корисних копалин: Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 104 с.
2. Козин В.З. Экспериментальное моделирование и оптимизация процессов обогащения полезных ископаемых. – М.: Недра, 1984. – 112 с.
3. Білецький В.С., Смирнов В.О. Технологія збагачення корисних копалин. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2007. – 272 с.
4. Шупов Л.П. Моделирование и расчет на ЭВМ схем обогащения. – М.: Недра, 1980. – 288 с.
5. Шупов Л.П. Прикладные математические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1972. – 168 с.
6. Рубинштейн Ю.Б., Волков Л.А. Математические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1987. – 296 с.
7. Папушин Ю.Л., Білецький В.С. Основи автоматизації гірничого виробництва. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2007. – 168 с.
8. Папушин Ю. Л. Дослідження корисних копалин на збагачуваність : навч. посіб. / Ю. Л. Папушин, В. О. Смирнов, В. С. Білецький ; Донец. нац. техн. ун-т, Донец. від-ня Наук. т-ва ім. Шевченка. – Донецьк : Сх. вид. дім, 2006. – 344 с.
9. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
10. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы. – М.: Мир, 1968. – 304 с.
11. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824 с.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
13. Рязанов Г.А. Электрическое моделирование с применением вихревых полей. – М.: Наука, 1969 – 336 с.
14. Барский Л.А., Рубинштейн Ю.Б. Кибернетические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1970. – 312 с.
15. Митрофанов С.И., Барский Л.А., Самыгин В.Д. Исследование полезных ископаемых на обогатимость. – М.: Недра, 1974. – 352 с.
16. Справочник по проектированию рудных обогатительных фабрик: Т. 1 / Редкол. О.Н. Тихонов – М.: Недра, 1988. – 374 с.
17. Фоменко Т.Г., Бутовецкий В.С., Погарцева Е.М. Исследование углей на обогатимость. – М.: Недра, 1978. – 262 с.

18. Тихонов О.Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
19. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 254 с.
20. Коткин А.М., Ямпольский М.Н., Геращенко К.Д. Оценка обогатимости угля и эффективности процессов обогащения. – М.: Недра, 1982. – 200 с.
21. Пожидаев В.Ф. Научные основы оценки обогатимости каменных углей и создание ресурсосберегающей технологии их переработки //Дис. на стиск. уч. степ. докт. техн. наук. Луганск: Восточноукраинский национальный университет. 2001. - 285 с.
22. Горобець Л.Ж. Развитие научных основ измельчения твердых полезных ископаемых //Дис. на стиск. уч. степ. докт. техн. наук. Днепропетровск: Национальный горный университет. 2004. – 412 с.
23. Кирнарский А.С. Технологические основы мокрой винтовой сепарации //Дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. Днепропетровск: Национальный горный университет. 2000. – 355 с.
24. Шпильовий Л. В. Технологічні основи автоматизації процесу згущення на збагачувальних фабриках (монографія). Донецьк: Східний видавничий дім. Донецьке відділення НТШ. 2011. — 184 с.
25. Младецький І.К. Моделювання процесу магнітної сепарації руд. Дніпропетровськ. 1986.
26. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика - М. Издат. физ.-мат. литер. 1959 - 700 с.
27. Пилов П.И. Научные основы сепарации и водопотребления при обогащении руд. // Автореф. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. - Дн-ск, 1993, 42 с.
28. Мостика Ю.С. Развитие научных основ кинетики мокрой высокоградиентной магнитной сепарации слабомагнитных руд. //Дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. Днепропетровск: Национальный горный университет. 2005. – 285 с.
29. Пилов П.И., Мильцын А.М., Олевский В.И. Математическое моделирование и структурно-экстраполярный анализ в задачах обогащения: монография – 2-е изд., испр. и доп. – Д., Национальный горный университет, 2011. – 187 с.
30. Технологическая оценка минерального сырья. Методы исследования: Справочник / Под ред. П.Е. Остапенко. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
31. Технологическая оценка минерального сырья. Опытные установки: Справочник / Под ред. П.Е. Остапенко. – М.: Недра, 1990. – 264 с.

32. Кармазин В.В. Магнитные, электрические и специальные методы обогащения полезных ископаемых. – М. – 2002.

33. Bonney C.F. Агломерація вугілля-золото – новий підхід до вилучення золота. Coal-Gold Agglomeration - new approach to Gold Recovery// Randjl Gold Forum 88, Scottsdale, Arizona. –1988, 23-24 January.

34. House C.I., Townsend I.G., Veal C.J. Напівпромислова переробка хвостів шляхом агломерації вугілля-золото. Coal-Gold Agglomeration – Pilot Scale Retreatment of Tailings// Randol International Gold Conference. - Perth, Australia. – 1988, November.

35. Білецький В.С. Розробка наукових основ і способів селективної масляної агрегації вугілля та вуглевмісних продуктів. - Дисертація на здобуття вченого ступеня докт. техн. наук. - Донецьк, 1994, 452 с.

36. Винарский М.С., Лурье М.В. Планирование эксперимента в технологических исследованиях. – Киев: Техника, 1975. – 168 с.

37. Адгезионный метод извлечения золота из руд и россыпей / Белецкий В.С., Елишевич А.Т. // Благородные и редкие металлы : сб. информ. материалов междунар. конф. "БРМ-94", 19–22 сент. 1994 г., Донецк. Ч. 1. / Междунар. инженер. акад., Гос. ком. Украины по вопр. науки и технологии, М-во финансов Украины [и др.]. – Донецк, 1994. – С.25–26.

38. Математичне моделювання процесу адгезійного контакту "вуглемасляна речовина – золото" / В. С. Білецький, П. В. Сергєєв // Наук. пр. Донец. держ. техн. ун-ту. Сер. гірничо-електромеханічна. – Донецьк, 2002.– Вип. 42. – С. 39–42.

39. Бейлин М.И. Теоретические основы процессов обезвоживания углей. - М.: Недра. - 1969. - 240 с.

40. Руденко К.Г., Шемаханов М.М. Обезвоживание и пылеулавливание. - М.: Недра, 1981. - 350 с.

41. Каминский В.С., Барбин Н.Б., Долина Л.Ф. Интенсификация процессов обезвоживания.- М.: Недра, 1982. - 224 с.

42. Никитин И.Н. Разработка флокуляционно-флотационного способа обогащения угольных шламов с применением латексного флокулянта. – Автореф.диссерт. на соиск.уч. степ.канд.техн.наук.- Люберцы: ИОТТ,1986.- 16 с.

43. Залевський В.І. Селективна флокуляція вугільних шламів синтетичними латексами.- Автореф.дисерт.наздоб.вчен.ступ.канд.техн.наук.- Дніпропетровськ: ДНГА, 2001.-20 с.

44. Нікітін І. М. Селективна флокуляція вугільних шламів латексами / І. М. Нікітін, П. В. Сергєєв, В. С. Білецький; Донец. держ. техн. ун-т, Наук. т-во ім. Т. Г. Шевченка. – Донецьк : Сх. вид. дім, 2001. – 150 с.

45. Зневоднення вугільного агломерату центрифугуванням / В. С. Білецький, П. В. Сергєєв, Д. В. Павлов // Збагачення корисних копалин. – 2009. – Вип. 36 (77)/37(78). – С. 173–176.
46. Харада Т., Мацуо Т. Агломерація у рідинах// Ніхон Когьо Кайсі. - 1982. - № 1134, С. 714-722.
47. Білецький В.С., Сергєєв П.В., Папушин Ю.Л. Теорія і практика селективної масляної агрегації вугілля. – Донецьк: Грань, 1996, 264 с.
48. Shrauti S.M., Arnold D. W. Recovery of waste fine coal by oil agglomeration // Fuel, 1995, 74 , № 3, p. 454-465.
49. Tovas D. Wheelock ea. The role of eir in oil agglomeration of coal at a moderate shear rate// Fuel, 1994, v. 73, № 7. p. 1103-1107.
50. Vega V.G. ea. Selective agglomeration of hing rank coals with vegeta-tible oils // 8 th Int. Conf. on coal Science. Oviedo. Spain, 10-12 September 1995. p. 296-297.
51. Чуянов К.Г., Шемаханов М.М. Обезвоживание, пылеулавливание и охрана окружающей среды.- М.: Недра. 1987.- 236 с.
52. Білецький В.С., Гаркушин Ю.К., Сергєєв П.В. Зневоднення дрібнодисперсного вугілля: застосування та інтенсифікація сучасних технологій//Українсько-польський форум гірників. Ялта, Крим, 13-19 вересня 2004. Матеріали форуму. Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2004, С. 603-614.
53. Кваша В.Б., Чижов В.В., Айнштейн В.Г. Срыв влаги с поверхности частиц в инжекторном слое //Инженерно-физический журнал. - 1976, - т.ХХХ, № 3. - С.411-415.
54. Филиппов В.А., Подлущкий Л.Д. Интенсификация обезвоживания мелких продуктов обогащения// Уголь .- 1981, № 12. - С. 47-48.
55. Филиппов В.А. Технология сушки и термоаэроклассификации углей. – Моска: Недра, - 1987. – 288 с.
56. Кхелуфи Абделькрим. Разработка технологии обогащения соленых углей. Автореф. на соиск.учен. степ. канд. техн. наук. - Днепропетровск, 1998, 19 с.
57. Скібенко В.М., Сергєєв П.В., Білецький В.С. Аеромеханічне зневоднення дисперсних матеріалів//Збагачення корисних копалин. - № 10(51). – 2000. – С. 92-99.
58. Небера В.П. Флокуляция минеральных суспензий. – М.: Недра, 1983. – 288 с.
59. Математичне моделювання процесу знесолення вугілля / В.С. Білецький, П.В. Сергєєв, Абделькрім Кхелуфі // Збагачення корисних копалин. – 2002. – № 16. – С. 61–65.
60. Білецький В.С., Смирнов В.О. Моделювання процесів збагачення корисних копалин. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2013. – 304 с.

61. Шпилевой Л. В., Назарова Т. С. Совершенствование технологии переработки полевошпатового сырья на основе избирательного измельчения минералов / Вісник НТУ«ХП» 2009. - № 25. – С. 115-122.
62. Статграфик: Руководство пользователя. - М., 2004. – 159 с.
63. Майдуков Г.Л. Технология фильтрования продуктов обогащения углей.- М: Недра, 1975.- 144 с.
64. Новые данные об обогащении углей в США //Геол.изуч. и использ.недр.- 1999.- № 4-5.- С.32-33.
65. Wen W.W., Richard P. Killmeyer, Bruce R., Utz. Richard E. Husko. Simultaneous Fine Coal Dewatering and Reconstitution via the U.S. Department of Energy In Situ Cake Hardening Process // Proceeding of the 12th International Coal Preparation Congress, Cracow, Poland, May 23-27, 1994.
66. Зедгинидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
67. Саранчук В.І., Ільяшов М.О., Ошовський В.В., Білецький В.С. Основи хімії і фізики горючих копалин. (Підручник з грифом Мінвузу). – Донецьк: Східний видавничий дім, 2008. – 640 с.
68. Круть О.А Водовугільне паливо. – Київ: Наук. Думка, 2002. – 172 с.
69. Білецький В.С., Воробйов А.П. Дослідження масляної агломерації бурого вугілля// Збагачення корисних копалин. - 2012. - №50(91). - С. 142-147.
70. Бродский Б.З., Бродский Л.И., Голикова Т.И. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей.- М.: Металлургия, 1982.- 752 с.
71. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента.- М.: Металлургия, 1981- 152 с.
72. Сергеев П. В. Селективна флокуляція вугільних шламів органічними реагентами / П. В.Сергеев, В. С. Білецький ; Донец. від-ня наук. т-ва ім. Шевченка, Ред. Укр. гірничої енцикл. – Донецьк : Сх. вид. дім, 2010. – 240 с.
73. Федоров В.И., Кучеренко И.П., Золотко А.А. Состояние и проблема развития углеобогащения Украины// Уголь Украины. – 1999. - № 8. – С. 13-17.
74. Пашков А. А., Лаврентьев К. Н. Интенсификация процесса сгущения // Горный журнал. – 2002. – Специальный выпуск.- С. 116-117.
75. Thickener polymer control system// Mining J/ - 1998. - 330. №8476 – с.305
76. Опыт применения флокуляров в обогащении / Кравцова Т.Н., Рогачева В.Б., Охрименко В.Е.// 2 всес. Науч. Техн. Конф. " Св-ва и применение водораств. Полимеров ",1991.-с. 161-162
77. Бойко В.С., Нечепуренко Е.С., Климанчук В.В., Крамаренко С.А., Шпилевой Л.В. Мазуровское месторождение в стратеги развития

Мариупольского металлургического комбината им. Ильича // Горный журнал. – 2002, №11-12. – с.33 - 36

78. Елизаров А.Г. Теоретические основы и практические методы экономии флокулянтов при обогащении руд. III конгр. обогатителей стран СНГ. – М 20-23 марта 2001 г. Тезисы докладов. М. Альтекс, 2001 г. с. 218

79. Білецький В.С., Шпильовий Л.В. Оптимізація режиму осадження твердої фази у згущувачі // Складні системи і процеси. – 2002, №2. – с. 78 – 82

80. Sworowska A. Flocculation of the syncrude fine tailings // Int. J. Miner. Process. - 2000. - 60, №2. – с. 143-152

81. Купеева Р. Д. Исследование процессов обезвоживания продуктов обогащения свинцово-цинковых руд / Сев.-Кавк. технол. ун-т. – Владикавказ, 1998. – 7 с – Деп.в ВИНТИ 25.08.98, № 2657-В98.

82. Интенсификация сгущения шламов железных и медно-никелевых руд с использованием модифицированных флокулянтов / Барский Л. А. и др. // Комплексное освоение минеральных ресурсов Севера и Сев. Зап. СССР (европ. часть).: Матер. Всес. Совещ., Петрозаводск, 1-4 июля, 1989. – Петрозаводск, 1990. – С. 183-187.

83. Барбин М.Б. О влиянии ПАВ и рН среды на отстаивание и фильтрование // Изв. ВУЗ. - Цветные металлы. - 1993, № 3-4. – с. 2 - 4

84. Справочник по обогащению руд. Специальные и вспомогательные процессы. Под ред. О.С.Богданова, Ю.Ф.Ненарокова, 2-е изд. Перераб. и доп. М.: Недра, 1984, 358 с.

85. Митрофанов С.И. Исследование руд на обогатимость. М., Металлургиздат, 1954, 494 с.

86. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 327с.

87. Математичне моделювання процесу осадження рідкіснометалічних руд / Л. В. Шпильовий, В. С. Білецький, П. В. Сергєєв // Вісн. Криворіз. техн.. ун-ту : зб. наук. пр. – 2004. – Вип. 3. – С. 131–135.